UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA — UFBA

LISTA DE EXERCÍCIOS: UNIDADE 3

CÁLCULO II A — TURMA 08 — 2005.1

PROF. ADRIANO PEDREIRA CATTAI

1) Determine o domínio das funções abaixo e represente-o graficamente:

a) $z = \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{y - 2}$

b) $z = \sqrt{y^2 - 4}.\ln(x - y)$

c) $z = \ln\left[\frac{x^2 + y^2 - 1}{x}\right]$

d) $z = \sqrt{\frac{y - x^2}{x^2 - y^2}}$

e) $z = \arccos(x - y)$

f) $z = e^{\sqrt{1-xy}}$

g) $z = \ln\frac{y - x^2 - 1}{2x - y + 1}$

h) $z = 1 - \sqrt{1 - (x^2 - y)^2}$

2) Determine o domínio, trace as curvas de nível e esboce o gráfico das funções:

a) $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2$

b) $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

c) $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$

d) $f(x,y) = x^2$

e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

f) $f(x,y)=8-2x-4y$

g) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} & ; \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3) Determine os limites a seguir:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - x^2y + y^2x - y^3}{x^2 + y^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{(x+y-4)(x^2+xy)}{(x-1)+(y-3)}$

4) Mostre que $\lim\limits_{P\to P_o} f(x,y)$ não existe se:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ e $P_o(0,0)$ b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$ e $P_o(0,0)$

c) $f(x,y) = \dfrac{y^3 - (x-2)^4}{2(x-2)^3 + y^3}$ e $P_o(2,0)$ d) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{y-1}$ e $P_o(0,1)$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y-4)(x^2+xy)}{(x-1)+(y-3)} & ; \text{ se } y \neq 4-x \\ 2 & ; \text{ se } y = 4-x \end{cases}$ e $P_o(1,3)$

5) Para as funções abaixo calcule, caso exista, as derivadas parciais, nos pontos indicados:

a) $f(x,y) = e^x \ln(x.y)$; $P_o(1,2)$ b) $f(x,y) = x\cos(\dfrac{x}{y} + \pi)$; $P_o(0,1)$

c) $f(x,y) = arctg\sqrt{4x^2 - y^2}$; $P_o(1,1)$ d) $f(x,y,z) = \sqrt{x} + (\text{sen}^2\, y)\tan z$; $P_o(4, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4})$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + 2y}{x^2 - y} & ; \text{ se } y \neq x^2 \\ 3 & ; \text{ se } y = x^2 \end{cases}$; $P_o(1,0)$ e $P_1(1,1)$

6) Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Mostre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

7) Seja ϕ:IR $\to$ IR uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1)=4$. Seja $g(x,y)=\phi(\frac{x}{y})$.

Calcule:

a) $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)$ b) $\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)$

8) Considere a função dada por $w = xy + z^4$, onde $z = f(x,y)$. Se $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 4$ e $f(1,1) = 1$,

calcule $\frac{\partial w}{\partial x}(1,1)$

9) Seja $f(x,y) = \int_{x^2}^{2y^2} e^{-t^2} dt$. Calcule: a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ b) $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$

10) Seja $f(x,y) = ye^{-x^2}$ uma superfície e $P_o(1,2) \in D(f)$. Determine a equação da reta tangente à uma curva interseção dessa superfície com o plano :

a) $x = 1$; no ponto (1,2,2/e) b) $y = 2$; no ponto (1,2,2/e)

11) Uma placa de metal aquecida está situada em um plano xoy de modo que a temperatura T no ponto (x,y) é dada por $T(x,y) = 10(x^2 + y^2)^2$. Determine a taxa de variação de T em relação à distância, no ponto $P_O(1,2)$ no sentido positivo do eixo:

a) OX b) OY

12) A área A da superfície lateral de um cone circular reto de altura h e raio da base r é dada por $A = \pi.r\sqrt{h^2 + r^2}$.

a) Se r é mantido fixo em 3cm, enquanto h varia, encontre a taxa de variação de A em relação a h, no instante em que h = 7cm.

b) Se h é mantido fixo em 7cm, enquanto r varia, encontre a taxa de variação de A em relação a r, no instante em que r = 3cm.

13) Uma fábrica produz mensalmente *x* unidades de um produto A e *y* unidades de um produto B, sendo o custo mensal de produção conjunta dado por $C(x,y) = 15000 + \sqrt{2x^2 + 8y^2}$ reais. Num determinado mês, foram produzidas 2000 unidades de A e 1000 de B.

a) Calcule o custo de produção neste mês.

b) Determine $\frac{\partial C}{\partial x}$ e $\frac{\partial C}{\partial y}$, neste mês.

c) Usando o resultado do ítem b), o que é mais conveniente: aumentar a produção de A e manter a de B constante ou ao contrário? Justifique.

14) Numa loja, o lucro diário L é uma função do número de vendedores *x*, e do capital investido em mercadorias *y*, (*y* em milhares de reais). Numa certa época tem-se, $\mathrm{L}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 500 - (10 - \mathrm{x})^2 - (40 - \mathrm{y})^2$, em milhares de reais.

a) Calcule o lucro diário se a loja tem 4 vendedores e 30.000 reais investidos.

b) Calcule $\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}}$ no ponto $(4,30)$ e $\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{y}}$, no mesmo ponto.

c) É mais lucrativo aumentar o número de vendedores de uma unidade mantendo o capital investido ou investir mais 1000 reais mantendo o número de vendedores?

15) Uma função *f* de *x* e *y* é harmônica se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Mostre que as funções a seguir são harmônicas:

a) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \ln\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$ b) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \operatorname{arctg}\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$

16) Sendo $z = e^x \ln y + \operatorname{sen} x \cdot \cos y$, calcule $\frac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}\partial \mathrm{x}}$ e $\frac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{y}}$.

17) Encontre a diferencial total para as funções:

a) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{y}\right)$ b) $f(x,y,z) = xe^{yz} + ye^{xz}$

18) Seja $f(x,y) = g(x^2 y, x^3 y^2)$, onde f e g são funções diferenciáveis. Sabendo-se que $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 16$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 8$, calcule as derivadas parciais de g no ponto (4,8).

19) Considere $f(x,y) = \ln(xy^2) + arctg(x^2 - y)$.

a) calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,3)$.

b) Se $x = g(u,v) = uv + 2v$, $y = h(u,v)$, $h(0,1) = 3$, $\frac{\partial h}{\partial u}(0,1) = 2$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = -4$, calcule.

i) $\frac{\partial f}{\partial u}(0,1)$ *ii*) $\frac{\partial h}{\partial v}(0,1)$

20) Se w = $f(x-at)+g(x+at)$, com f e g dotadas de derivadas parciais segundas, mostre que w satisfaz a equação da onda $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

21) Seja $f(x,y,z) = g\left(e^{xyz}, x^2y^2z^2\right)$. Determine o valor da constante β, sabendo-se que $\beta x \frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$.

22) Usando derivada total, resolva os seguintes problemas:

a) Num dado instante, o comprimento de um lado de um retângulo é 6cm e cresce à taxa de 1cm/seg e o comprimento do outro lado é 10cm e decresce à taxa de 2 cm/seg. Encontre a taxa de variação da área do retângulo, no dado instante.

b) A altura de um cilindro reto de base circular está diminuindo à taxa de 10 cm/min e o raio está aumentando à taxa de 4 cm/min. Encontre a taxa de variação do volume no instante em que a altura é 50cm e o raio é de 16cm.

c) Em um dado instante, o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo é 10cm e cresce à razão de 1cm/min e o comprimento do outro é 12cm e decresce à razão de 2cm/min. Encontre a razão de variação da medida do ângulo agudo oposto ao cateto de 12cm de comprimento, no dado instante.

23) Se z é função de x e y definida implicitamente pela equação $y + x^{(z-1)} + y^2 z = 1$, determine $\vec{\nabla} z(2,0)$.

24) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o, y_o)$ sendo dados:

a) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$, $(x_o, y_o) = (1,1)$ e $\vec{u}$ é o versor de $(3,4)$.

b) $f(x,y) = \text{arctg}\frac{x}{y}$; $(x_o, y_o) = (3,3)$ e $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$; $(x_o, y_o) = (3,2)$ e $\vec{u} = \frac{5}{13}\vec{i} + \frac{12}{13}\vec{j}$

25) Para cada função e o ponto indicado determine:

i) Um vetor unitário na direção da derivada direcional máxima.

ii) O valor máximo da derivada direcional.

a) $f(x,y) = x^2 - 7xy + 4y^2, P_o(1,-1)$

b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - \operatorname{sen} y, P_o(1,\frac{\pi}{2})$

26) Ache um vetor normal e a equação da reta tangente a cada curva no ponto indicado:

a) $x^2 + y^2 = 2$, $P_o(1,1)$ b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$, $P_o(1/2,1)$

27) Uma chapa de metal aquecida está situada em um plano xy de tal modo que a temperatura T é inversamente proporcional à distânciada origem. Se a temperatura em P(3,4) é de 100º, determine a taxa de variação de T em P na direção do vetor $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Em que direção e sentido T cresce mais rapidamente em P? Em que direção a taxa de variação é nula?

28) O potencial elétrico V em um ponto P(x,y,z) num sistema de coordenadas retangulares é dado por $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Determine a taxa de variação de V em P(2,-1,3) na direção de P para a origem. Determine a direção e sentido que produz taxa máxima de variação de V em P. Qual a taxa máxima de variação em P?

29) Encontre a equação do plano tangente e da reta normal a cada superfície abaixo, nos pontos indicados:

a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ em P = (1,1,1)

b) $xyz = 6$ no ponto cuja projeção no plano $y = 0$ é $(1,0,3)$

c) $\cos(xy) + \operatorname{sen}(yz) = 0$ em P = $(1, \pi/6, -2)$

d) $x^3 + y^3 + z - 6xy = 0$ para x = y = 2

e) $g(x,y) = x^y$ em $(1,1,1)$

30) Dada a superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, determine as equações dos planos tangentes que são paralelos ao plano $x + 4y + 6z = 0$.

31) Ache os pontos da superfície $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ para os quais os planos tangentes são paralelos aos planos coordenados.

32) Encontre o vetor direção da reta tangente no ponto dado da curva C que é interseção das superfícies:

a) $xz + 2x + 4z = 5$ e $4xy + 3y + 6z = 56$, no ponto $(2,5,1/6)$

b) $x^2 - 2xz + y^2z = 1$ e $3xy + 2yz = -6$, no ponto $(1,-2,0)$

33) Calcule as seguintes integrais iteradas:

a) $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dydx$

b) $\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{(x/y)} dxdy$

c) $\int_0^{\pi} \int_0^{y^2} sen(\frac{x}{y}) dxdy$

d) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy$

e) $\int_0^1 \int_x^1 \frac{sen(y)}{y} dydx$

f) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y} 3^{(x^2/y^2)} dydx$

g) $\int_0^{\sqrt[6]{\pi}} \int_{x^3}^{\sqrt{\pi}} x^2 sen(y^2) dydx$

h) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y} cos(2y)\sqrt{4 - sen^2(x)} dxdy$

34) Calcule:

a) $\iint_R x^2 \sqrt{9 - y^2}\, dA$, onde R é a região do plano limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

b) $\iint_R sen\, x.dA$, onde R é a região do plano limitada pelas retas y = 2x, y = x/2 e x = π.

c) $\iint_R \cos(x + y) dA$, onde R é a região plana limitada pelas retas y = x, x = π e y = 0.

35) Encontre (por integração dupla), a área limitada pelas curvas:

a) $y = x^3$ e $y = x^2$

b) $y = x^2 - 9$ e $y = 9 - x^2$

36) Calcule de duas maneiras $\iint_R xydA$, onde R é a região do plano xoy limitada por $y = x^2$ e $y = 2 + x$.

37) Encontre (por integração dupla), o volume do sólido:

a) no 1° octante limitado pelo plano z = 8 - x - 2y

b) abaixo do plano z = 4y e acima do círculo $x^2 + y^2 = 16$ no plano xy.

c) limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$

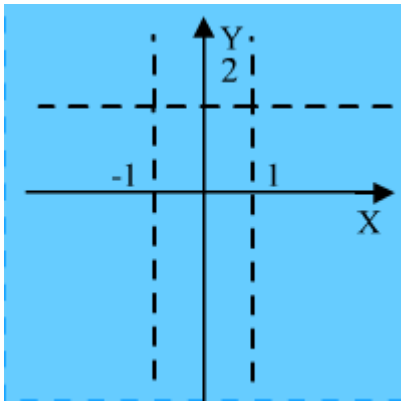
d) limitado por $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; x = 0, y = 0 e z = 0.

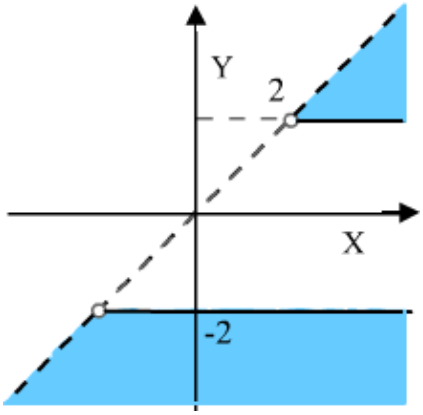
e) situado no 1^0 octante e limitado por $z = 4 - y^2$, $y = 2x$ e $x = 0$.

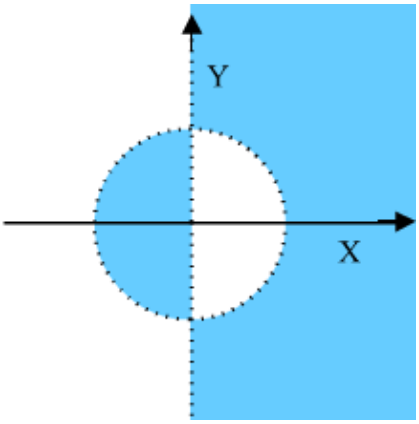
f) situado no 1^0 octante e limitado por $z = 4 - y^2$, $y = 0$, $y = 2x$ e $x = 1$.

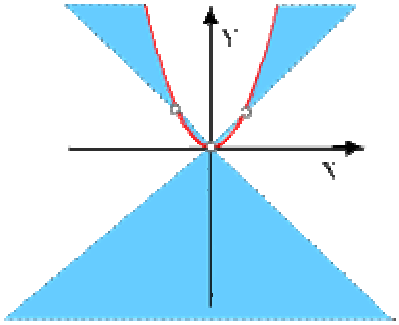
Respostas

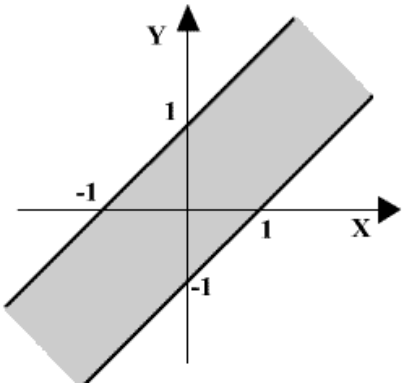
1)

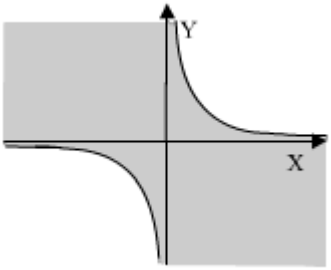


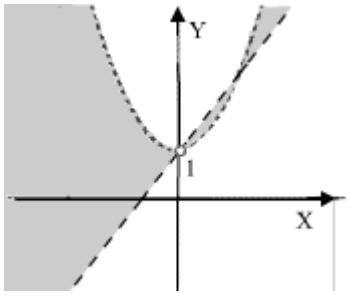


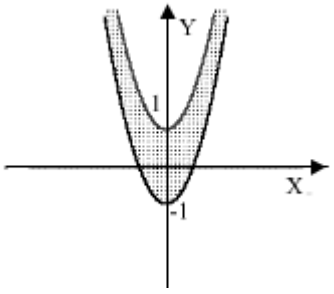






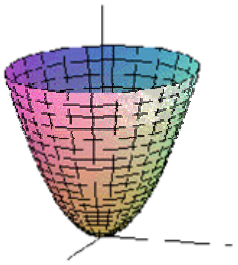


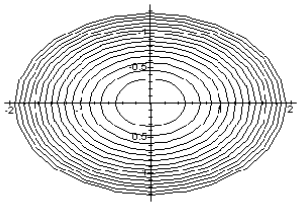




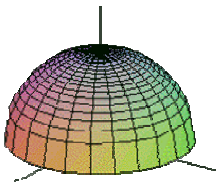
2)

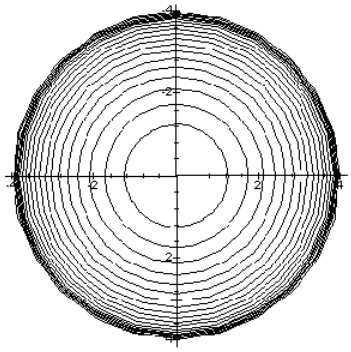
a)



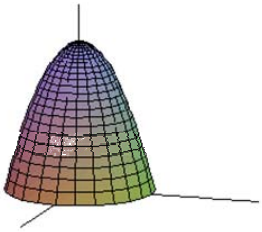


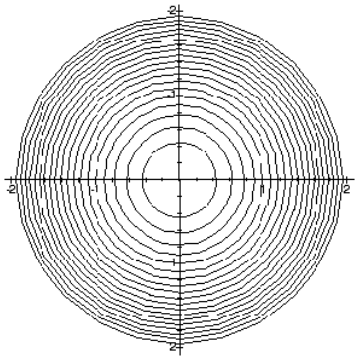
b)



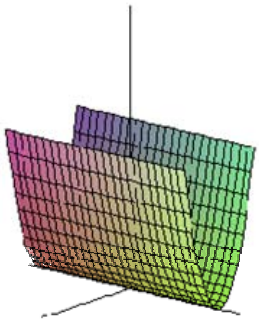


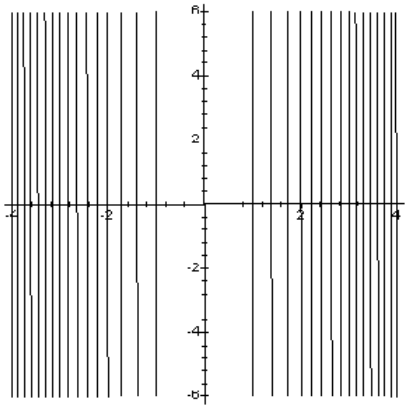
c)



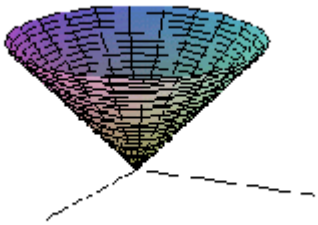


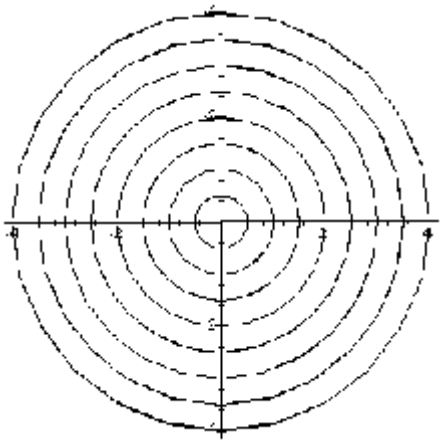
d)



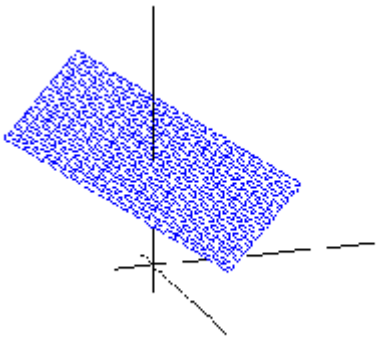


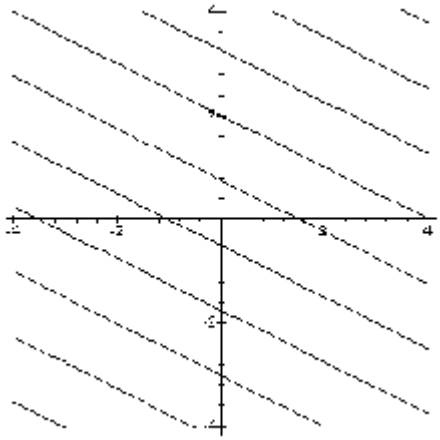
e)



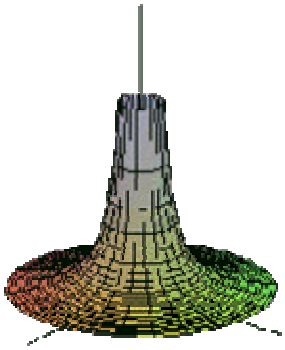


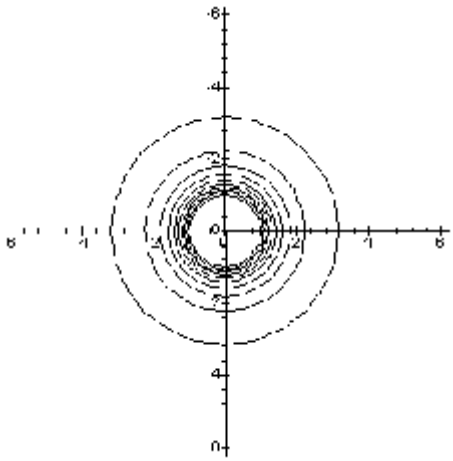
f)





g)





3) a) zero b) zero c) 4

5)a) $f_x(P_o) = e(1+\ln 2)$, $f_y(P_o) = \frac{e}{2}$ b) $f_x(P_o) = -1, f_y(P_o) = 0$

c) $f_X(P_O) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f_y(P_O) = \frac{-\sqrt{3}}{12}$ d) $f_x(P_o) = \frac{1}{4}, f_y(P_o) = 1, f_z(P_o) = 1$

e) $f_x(P_o) = 0, f_y(P_o) = 5, \nexists f_x(P_1)$ e $\nexists f_y(P_1)$

7) a) 4 b) - 4 **8**) 17 **9**) a) $-2xe^{-x^4}$ b) $4e^{-4}$ **10**) a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = ez \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2 \\ 4x + ez = 6 \end{cases}$

11) a) 200 b) 400 **12**) a) $\frac{21\pi}{\sqrt{58}}$ b) $\frac{67\pi}{\sqrt{58}}$ **13**) a) 19000 b) 1;2 c) Manter B constante

14) a) R$ 364.000,00 b) 12;20 c) Investir R$1.000,00

17) a) $\frac{dx}{\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xdy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$ b) $(e^{yz}+yze^{xz})dx+(xze^{yz}+e^{xz})dy+(xye^{yz}+xye^{xz})dz$

18) $\frac{\partial g}{\partial u}(4,8)=10$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(4,8)=-2$ **19**) a) $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(2,3)=2$ b) i) $\frac{\partial f}{\partial u}(0,1)=\frac{17}{6}$ ii) $\frac{\partial h}{\partial v}(0,1)=-54$

21) $\beta = 2$ **22**)**a)** -2cm²/seg **b)** 3840πcm³/min **c)** -8/61rad/min

23) $\vec{\nabla}z(2,0)=\left(0,-\frac{1}{\ln 2}\right)$ **24**) a) -2/5 b) zero c) -6/169

25) **a)** $\frac{3\sqrt{34}}{34}\vec{i}-\frac{5\sqrt{34}}{34}\vec{j}$; $\sqrt{306}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}}\vec{i}-\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}\vec{j}$; $\sqrt{4+\pi^2}$

26) a) $2\vec{i}+2\vec{j}$; $x+y-2=0$ b) $4\vec{i}+\vec{j}$; $4x+y-3=0$

27) $-\frac{28}{\sqrt{2}}$; $(-12,-16)$; $\lambda(4\vec{i}-3\vec{j})\,;\lambda\neq 0$ **28**) $-\frac{178}{\sqrt{14}}$; $4\vec{i}-8\vec{j}+54\vec{k}$, $\sqrt{2996}$

29) a) $x+2y+3z=6; \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{6}$ b) $6x+3y+2z=18;\ x-1=2y-4=3z-9$

c) $\pi x+18y-\pi z=6\pi; \frac{x-1}{\pi}=\frac{y-\frac{\pi}{6}}{18}=-\frac{z+2}{\pi}$ d) $z=8;\ (x,y,z)=(2,2,0)+t(0,0,1);\ t\in IR$

e) $z-x=0;\ (x,y,z)=(1,1,1)+t(1,0,-1);\ t\in IR$

30) $x+4y+6z=21$ e $x+4y+6z=-21$

31) Não existe plano tangente à superfície paralelo ao plano $z = 0$. Os planos tangentes à superfície nos pontos $(1,1,0)$ e $(1,-1,0)$ são paralelos ao plano $y = 0$. Os planos tangentes à superfície nos pontos $(0,0,0)$ e $(2,0,0)$ são paralelos ao plano $x = 0$.

32) a) $(-66,107,\frac{143}{6})$ b) $(6,4,-6)$

33) a) 42 b) $\frac{1}{2}$ c) $2+\frac{\pi^2}{2}$ d) $\frac{(e-1)}{2}$ e) $1-\cos(1)$ f) $\frac{20-\ln 3}{\ln^2 3}$ g) $\frac{1}{3}$ h) $\sqrt{3}-\frac{8}{3}$

34) *a*) $\frac{864}{5}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) -2 **35**) a) $\frac{1}{12}$ b) 72 **36**) $\frac{45}{8}$

37) a) $\frac{128}{3}$ b) $\frac{512}{3}$ c) $\frac{128}{3}$ d) $\frac{abc}{3}$ e) 2 f) $\frac{10}{3}$