

# Curso de Análise II

Augusto Armando de Castro Júnior (armando@impa.br)

15 de abril de 2007

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Princípios de Topologia Geral</b>	<b>1</b>
1.1	Espaços topológicos . . . . .	1
1.1.1	Conjuntos conexos . . . . .	6
1.1.2	Conjuntos compactos . . . . .	10
1.2	Aplicações contínuas . . . . .	15
1.3	Exercícios . . . . .	20
1.4	Espaços métricos . . . . .	22
1.4.1	Espaços métricos produtos . . . . .	43
1.5	Exercícios . . . . .	45
1.6	Espaços vetoriais normados . . . . .	46
1.7	Exercícios . . . . .	59
<b>2</b>	<b>Aplicações deriváveis</b>	<b>63</b>
2.1	Desigualdade do Valor Médio . . . . .	66
2.2	Derivadas Parciais . . . . .	77
2.3	Sequências e séries de aplicações deriváveis . . . . .	80
2.4	Derivadas de Ordem Superior . . . . .	82
2.5	Exercícios . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Funções Inversas e Implícitas</b>	<b>85</b>
3.1	O teorema da Função Inversa . . . . .	88
3.1.1	Funções $C^\infty$ não analíticas . . . . .	88
3.2	O teorema da Função Implícita . . . . .	91
3.3	Exercícios . . . . .	96
<b>4</b>	<b>A Integral de Riemann em Espaços de Banach</b>	<b>97</b>
4.1	O Teorema Fundamental do Cálculo . . . . .	107
4.2	Fórmulas Clássicas do Cálculo . . . . .	109

4.3 Caracterização das Aplicações Integráveis à Riemann . . . . . 112

# Capítulo 1

## Princípios de Topologia Geral

### 1.1 Espaços topológicos

**Definição 1.1.1.** (Topologia e Espaço topológico). Um par  $(X, \mathcal{T})$  é dito ser um *espaço topológico* se  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  é uma coleção de subconjuntos de  $X$ , denominados *abertos* (de  $X$ ), tal que:

- $X$  e  $\emptyset$  pertencem a  $\mathcal{T}$ .
- $\mathcal{T}$  é fechada para uniões arbitrárias de seus elementos. Em outras palavras, dada uma família arbitrária (possivelmente não enumerável)  $(A_\tau)_{\tau \in \Upsilon}$  de abertos  $A_\tau \in \mathcal{T}$ , a união  $\cup_{\tau \in \Upsilon} A_\tau$  também é um conjunto aberto.
- $\mathcal{T}$  é fechada para intersecções finitas de seu elementos. Isto é, dados abertos  $A_1, \dots, A_q \in \mathcal{T}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , a intersecção  $\cap_{j=1}^q A_j$  também é um conjunto aberto.

A coleção  $\mathcal{T}$  é dita ser uma *topologia*.

Em geral, por um abuso de linguagem, diz-se que  $X$  é um espaço topológico, subentendendo-se a topologia  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ .

**Exemplo 1.1.2.** Tome  $X := \mathbb{R}$  e  $\mathcal{T} := \{\cup_{j=1}^{\infty} I_j, I_j \text{ intervalo aberto da reta}\}$ . Tal corresponde à topologia usual em  $\mathbb{R}$ , vista nos cursos de análise na reta. No exercício 1 convidamos o leitor a demonstrar que esta coleção  $\mathcal{T}$  é mesmo uma topologia.

**Exemplo 1.1.3.** Tome  $X := \{1, 2, 3\}$  e

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2, 3\}\}.$$

**Exemplo 1.1.4.** Seja  $(X, \mathcal{T}_X)$  um espaço topológico. Seja  $Y \subset X$ . Então a coleção

$$\mathcal{T}_Y := \{Y \cap A, A \in \mathcal{T}\}$$

é uma topologia de  $Y$ , denominada a *topologia de  $Y$  induzida por  $X$* .

**Exemplo 1.1.5.** Seja  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais e  $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$  a topologia em  $\mathbb{N}$  induzida por  $\mathbb{R}$  (veja o exemplo 1.1.2). Daí, cada conjunto unitário  $\{n\}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , é um aberto de  $\mathbb{N}$ : de fato,  $\{n\} = \{n\} \cap (n - 1/2, n + 1/2)$ . Como a união de abertos é aberta, concluímos que todo subconjunto de  $\mathbb{N}$  é aberto da topologia induzida.

**Definição 1.1.6.** (Interior de um conjunto). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e seja  $S \subset X$  um conjunto. O *interior* de  $S$ , denotado por  $\text{int}(S)$ , é definido como a união de todos os abertos  $A \in \mathcal{T}$  tais que  $A \subset S$ .

**Definição 1.1.7.** (Fronteira de um conjunto). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e seja  $S \subset X$  um conjunto. A *fronteira* de  $S$ , denotada por  $\partial S$ , é definida como o conjunto dos pontos de  $X$  que não estão nem no interior de  $S$  nem no interior do complementar de  $S$ .

**Observação 1.1.8.** Seja  $S \subset X$  um subconjunto de um espaço topológico  $X$ . Note que a definição de fronteira cria as seguintes três únicas alternativas mutuamente excludentes para um ponto  $x \in X$ : ou  $x \in \text{int}(S)$ , ou  $x \in \text{int}(S^c)$  ou  $x \in \partial S = \partial S^c$ . Concisamente, dado um subconjunto  $S$  de um espaço topológico  $X$ , este último se escreve com a união disjunta:

$$X = \text{int}(S) \cup \partial S \cup \text{int}(S^c).$$

Observe ainda que a própria fronteira  $\partial S$  pode possuir interior não vazio.

**Proposição 1.1.9.** A fronteira  $\partial S$  de um subconjunto  $S$  de um espaço topológico  $X$  admite a seguinte definição equivalente:

$$\partial S = \{x \in X; \forall \text{ aberto } A \ni x, \text{ temos } A \cap S \neq \emptyset \text{ e } A \cap S^c \neq \emptyset\}.$$

**Prova:** Para ver que ambas as definições de  $\partial S$  são equivalentes, seja  $x \in X$  tal que  $x \notin \text{int}(S)$  e  $x \notin \text{int}(S^c)$ . Então, dado qualquer aberto  $A \ni x$ , temos, por exemplo, que  $A \not\subset S$ , caso contrário teríamos

$$A \subset \text{int}(S) = \cup_{\mathcal{T} \ni A_\lambda \subset S} A_\lambda \Rightarrow x \in \text{int}(S),$$

absurdo. Por razões totalmente análogas, temos que  $A \not\subset S^c$ . Mas daí obtemos:

$$A \not\subset S^c \Rightarrow A \cap S \neq \emptyset,$$

e

$$A \not\subset S \Rightarrow A \cap S^c \neq \emptyset.$$

Reciprocamente, se  $x \in X$  é tal que para todo aberto  $A \ni x$  temos  $A \cap S \neq \emptyset$  e  $A \cap S^c \neq \emptyset$ , temos que não existe aberto contido em  $S$  contendo  $x$ , o que implica que

$$x \notin \cup_{\mathcal{T} \ni A_\lambda \subset S} A_\lambda = \text{int}(S).$$

O mesmo raciocínio nos mostra que  $x \notin \text{int}(S^c)$ .

□

**Definição 1.1.10.** (Base de uma topologia). Dada uma topologia  $\mathcal{T}$ , uma *base* de  $\mathcal{T}$  é uma subcoleção  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  tal que todo elemento de  $\mathcal{T}$  pode ser escrito como união de abertos pertencentes a  $\mathcal{B}$ .

**Definição 1.1.11.** (Sequência). Seja  $X$  um conjunto qualquer. Uma *sequência* em  $X$  é uma aplicação  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Denota-se  $x_j := x(j)$  e  $(x_j) := x$ . Dada uma sequência  $(x_j) : \mathbb{N} \rightarrow X$ , uma *subsequência*  $(x_{j_k})$  de  $(x_j)$  é qualquer restrição de  $(x_j)$  a um subconjunto infinito  $\hat{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ ,  $\hat{\mathbb{N}} = \{j_1, j_2, \dots, \text{com } j_1 < j_2 < \dots\}$ .

**Definição 1.1.12.** (Sequência convergente). Uma sequência  $(x_j)$  em um espaço topológico  $(X, \mathcal{T})$  é dita *convergente* para  $y \in X$  se para todo aberto  $A \in \mathcal{T}$  tal que  $y \in A$ , tem-se um número finito de índices  $j$  tais que  $x_j \notin A$ . Em outras palavras, dado um aberto  $A \in \mathcal{T}$ , com  $y \in A$ , existe  $j_A$  tal que  $x_j \in A, \forall n > n_A$ . Escrevemos  $x_j \rightarrow y$  quando  $j \rightarrow +\infty$ , ou simplesmente  $x_j \rightarrow y$  para denotar que a sequência  $(x_j)$  converge a  $y \in X$ . Dizemos que uma *subsequência*  $(x_{j_k})$  é *convergente* se a sequência  $(y_k) : \mathbb{N} \rightarrow X$  definida por  $y_k := x_{j_k}, \forall k \in \mathbb{N}$  for convergente.

**Exemplo 1.1.13.** Seja  $(X, \mathcal{T})$  como no exemplo 1.1.3; tome a sequência  $(x_j) : \mathbb{N} \rightarrow X$  definida por:

$$x_j := 2, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Então, temos que  $x_j \rightarrow 2$  e  $x_j \rightarrow 3$ , ou seja, nesta topologia, o limite de sequências não é único.

**Observação 1.1.14.** Dado um espaço topológico  $(X, \mathcal{T})$  e dada  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  uma base da topologia, para verificar que uma sequência  $(x_j)$  converge para um ponto  $x \in X$ , basta verificarmos a propriedade de convergência para abertos  $B \in \mathcal{B}$ . De fato, tenhamos por hipótese que dado  $B \in \mathcal{B}$  com  $x \in B$ , exista  $j_B \in \mathbb{N}$  tal que  $x_j \in B, \forall j > j_B$ . Tome  $A \in \mathcal{T}$  tal que  $x \in A$ . Como  $\mathcal{B}$  é uma base da topologia,  $A = \cup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ , com  $B_\lambda \in \mathcal{B}$  e  $\Lambda$  um conjunto qualquer (possivelmente não enumerável) de índices. Como  $x \in A = \cup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ , segue-se que existe algum  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que  $x \in B_{\lambda_0}$ . Escrevendo  $B = B_{\lambda_0}$ , de nossa hipótese, existe  $j_B \in \mathbb{N}$  tal que  $x_j \in B \subset A, \forall j > j_B$ , o que implica que  $x_j \rightarrow x$ .

**Definição 1.1.15.** (Conjunto fechado). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico. A coleção

$$\mathcal{F} := \{F \in \mathcal{P}(X); F = A^c \text{ para algum } A \in \mathcal{T}\}$$

é dita a *coleção dos fechados* de  $X$ . Cada  $F \in \mathcal{F}$  é dito um conjunto *fechado* de  $X$ .

**Observação 1.1.16.** A coleção  $\mathcal{F}$  dos fechados de um espaço topológico possui as seguintes propriedades, oriundas das Leis de De Morgan:

1.  $X \in \mathcal{F}$  e  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ;
2.  $\mathcal{F}$  é fechada para intersecções quaisquer (possivelmente não enumeráveis) de seus elementos: se  $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  é uma família contida em  $\mathcal{P}(X)$ , então

$$F_\lambda \in \mathcal{F}, \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow \cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}.$$

3.  $\mathcal{F}$  é fechada para união finita de seus elementos:

$$F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{j=1}^k F_j \in \mathcal{F}, \text{ com } k \in \mathbb{N}.$$

**Exemplo 1.1.17.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico e seja  $Y \subset X$  dotado da topologia induzida por  $X$ . Então a coleção dos fechados de  $Y$  com respeito à topologia induzida é:

$$\{F \cap Y, \text{ onde } F \text{ é conjunto fechado de } X\}$$

**Definição 1.1.18.** (Conjunto sequencialmente fechado). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico. Um conjunto  $F \subset X$  é dito *sequencialmente fechado* se dada qualquer seqüência convergente  $(x_n)$  tal que  $x_n \in F, \forall n \in \mathbb{N}$ , então  $x_n$  converge para um ponto pertencente a  $F$ .

**Proposição 1.1.19.** *Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e seja  $F \subset X$  um conjunto fechado. Então  $F$  é sequencialmente fechado.*

**Prova:** Seja  $(x_n)$  uma seqüência convergente, com  $x_n \in F, \forall n \in \mathbb{N}$ . Em particular, suponha que  $x_n \rightarrow x \in X$ . Se por absurdo,  $x \notin F$ , como  $F^c$  é aberto e  $(x_n)$  é convergente, temos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in F^c, \forall n \geq n_0$ , o que é absurdo, pois  $x_n \in F \forall n \in \mathbb{N}$ . Logo  $x \in F$  e  $F$  é sequencialmente fechado.  $\square$

**Definição 1.1.20.** (Fecho de um conjunto  $S \subset X$ ). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e seja  $S \subset X$ . O *fecho* de  $S$  em  $X$  é a intersecção

$$\bar{S} := \bigcap_{F_\lambda \supset S} F_\lambda,$$

de todos os fechados  $F_\lambda$  de  $X$  que contém  $S$ . Como a intersecção arbitrária de fechados é fechada, temos que o fecho de  $S$ , denotado por  $\bar{S}$  é o menor fechado de  $X$  que contém  $S$ .

**Proposição 1.1.21.** *Dado  $S \subset X$ , onde  $(X, \mathcal{T})$  é um espaço topológico, e  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  uma base, temos:*

$$\bar{x} \in \bar{S} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{B}, \text{ com } \bar{x} \in A, \text{ vale } A \cap S \neq \emptyset.$$

**Prova:**  $(\Rightarrow)$  Seja  $\bar{x} \in \bar{S}$  e seja  $A \in \mathcal{B}$  tal que  $\bar{x} \in A$ . Se  $A \cap S = \emptyset$ , então  $A^c$  é um fechado contendo  $S$ ; em particular,

$$A^c \supset \bigcap_{F_\lambda \supset S} F_\lambda = \bar{S},$$

o que é absurdo, pois por hipótese  $\bar{x} \in A \cap \bar{S}$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\bar{x}$  tal que  $\forall A \in \mathcal{B}$ , temos  $A \cap S \neq \emptyset$ . Mostremos que  $\bar{x} \in \overline{S}$ . De fato, se  $\bar{x} \notin \overline{S}$ , existiria algum fechado  $F_\lambda \supset S$  tal que  $\bar{x} \notin F_\lambda$ . Daí,  $\bar{x}$  pertenceria ao aberto  $F_\lambda^c$ , e como  $\mathcal{B}$  é uma base da topologia, existiria  $A \in \mathcal{B}$  tal que  $\bar{x} \in A \subset F_\lambda^c$ . Mas por hipótese  $A \cap S \neq \emptyset$ , o que é absurdo, pois  $S \subset F_\lambda \subset A^c$ . Portanto,  $\bar{x}$  pertence a todo fechado contendo  $S$ , e consequentemente a  $\overline{S}$ . □

### 1.1.1 Conjuntos conexos

**Definição 1.1.22.** (Espaço conexo). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico.  $X$  é *conexo* se os únicos fechados de  $X$  pertencentes a  $\mathcal{T}$  são  $\emptyset$  e  $X$ . Seja  $S \subset X$ .  $S$  é um conjunto *conexo* de  $X$  se é um espaço topológico conexo quando munido da topologia induzida por  $X$  (vide exemplo 1.1.4 da página 2).

A maioria dos livros define *conjunto conexo* de uma maneira (equivalente) um pouco menos concisa, a qual também faremos abaixo, por trazer outra luz sobre o conceito.

**Definição 1.1.23.** (Cisão por abertos). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e seja  $C \subset X$ . Uma *cisão* de  $C$  por abertos (ou simplesmente, uma *cisão*) é um par de abertos  $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$  tal que  $A_1 \cap A_2 \cap C = \emptyset$  e  $A_1 \cup A_2 \supset C$ . Se  $A_1 \cap C = \emptyset$  ou  $A_2 \cap C = \emptyset$ , a cisão é dita *trivial*. Caso contrário, é dita não trivial.

**Definição 1.1.24.** (Conjunto conexo- def. alternativa). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico. Um conjunto  $C \subset X$  é dito *conexo* se qualquer cisão de  $C$  por abertos é trivial.

**Observação 1.1.25.** Note que na definição de cisão os abertos  $A_1$  e  $A_2$  podem não ser disjuntos.

**Teorema 1.1.26.** (da Alfândega). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e sejam  $C \subset X$  um conexo, e  $S \subset X$  um conjunto qualquer. Se  $C \cap S \neq \emptyset$  e  $C \cap S^c \neq \emptyset$ , então  $C \cap \partial S \neq \emptyset$ .

**Prova:** Suponha por absurdo que  $C \cap \partial S = \emptyset$ . Então, pela observação 1.1.8 da página 2 temos:

$$\left. \begin{array}{l} X = \text{int}(S) \cup \partial S \cup \text{int}(S^c) \\ C \cap \partial S = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow C \subset \text{int}(S) \cup \text{int}(S^c).$$

Por conseguinte,  $\text{int}(S), \text{int}(S^c)$  formam uma cisão de  $C$  por abertos. Como por hipótese  $C \cap S \neq \emptyset$  e por definição  $\text{int}(S^c) \subset S^c$ , obtemos que  $C \cap \text{int}(S) \neq \emptyset$ . Permutando os papéis de  $S$  e  $S^c$ , obtemos também que  $C \cap \text{int}(S^c) \neq \emptyset$ , o que nos dá uma cisão não trivial para  $C$ , o que é absurdo pois  $C$  é conexo.  $\square$

**Teorema 1.1.27.** *(União de conexos com um ponto em comum é conexa). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e seja  $\{C_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{P}(X)$  uma família qualquer de conexos  $C_\lambda \subset X$  contendo um ponto  $x \in X$  em comum, isto é,  $\exists x \in C_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$ . Então  $C := \cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$  é conexo.*

**Prova:** Suponha que  $C$  não seja conexo. Então, existe uma cisão não trivial de  $C \subset A \cup B$ , com  $A, B$  abertos disjuntos de  $X$  tais que  $A \cap C \neq \emptyset$  e  $B \cap C \neq \emptyset$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $x \in A \cap C$ . Como a cisão é não trivial, existe  $y \in B \cap C$ . Como  $C = \cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ , existe  $\tilde{\lambda} \in \Lambda$  tal que  $C_{\tilde{\lambda}} \ni y$ , ou seja,  $B \cap C_{\tilde{\lambda}} \neq \emptyset$ . Visto que  $x \in A \cap C_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$ , concluímos também que  $A \cap C_{\tilde{\lambda}} \neq \emptyset$ . Ademais,  $C_{\tilde{\lambda}} \subset C \subset A \cup B$ , o que significa que  $A, B$  constituem uma cisão não trivial de  $C_{\tilde{\lambda}}$ , o que contradiz o fato de que  $C_{\tilde{\lambda}}$  é conexo.  $\square$

**Observação 1.1.28.** A união de conexos sem ponto em comum pode ou não ser conexo. No caso de abertos conexos, sua união só será conexa se tiverem algum ponto em comum.

Abaixo, alguns exemplos na reta dessa última observação.

**Exemplo 1.1.29.** Tome  $C_1 := [a, b), C_2 = [b, c)$ . Então  $C_1 \cup C_2 = [a, c]$  é conexo.

**Exemplo 1.1.30.** Tomando  $C_1 := (a, b), C_2 = (b, c)$ . Então  $C_1 \cup C_2$  não é conexo pois  $C_1$  e  $C_2$  constituem eles mesmos uma cisão não trivial de sua união.

O teorema 1.1.27 nos induz a fazer uma profícua definição:

**Definição 1.1.31.** (Componente conexa). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e seja  $S \subset X$  um conjunto. Dado  $s \in S$ , a componente conexa  $C_s$  de  $S$  contendo  $s$  é a união de todos os subconjuntos conexos de  $S$  contendo  $s$ . Pelo teorema 1.1.27,

$$C_s := \bigcup_{\substack{s \in S_\lambda \subset S, \\ S_\lambda \text{ conexo}}} S_\lambda$$

é conexo.

**Proposição 1.1.32.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $S \subset X$ . Duas componentes conexas de  $S$  ou são a mesma ou são disjuntas.*

**Prova:** Sejam  $C_y$  e  $C_z$  duas componentes conexas de  $S$ . Suponha que  $C_y \cap C_z \neq \emptyset$ , pois se forem disjuntas, nada temos a mostrar. Então, como  $C_y$  e  $C_z$  são conexos com algum ponto em comum, pelo teorema 1.1.27 sua união  $C_y \cup C_z$  é conexa. Mas  $y \in C_y \cup C_z$ , e como

$$C_y := \bigcup_{\substack{y \in S_\lambda \subset S, \\ S_\lambda \text{ conexo}}} S_\lambda,$$

temos que

$$C_y \supset C_y \cup C_z \Rightarrow C_y = C_y \cup C_z \Rightarrow C_z \subset C_y.$$

Permutando os papéis de  $C_y$  e  $C_z$  obtemos que  $C_y \subset C_z$  e por conseguinte  $C_y = C_z$ .  $\square$

Lembramos aqui a definição de partição de um conjunto.

**Definição 1.1.33.** (Partição de um conjunto). Dado um conjunto  $S$ , uma *partição* de  $S$  é uma coleção  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(S)$  tal que  $\bigcup_{S_\lambda \in \mathcal{C}} S_\lambda = S$  e dados  $S_\lambda$  e  $S_{\tilde{\lambda}} \in \mathcal{C}$  ocorre exatamente uma das seguintes coisas: ou  $S_\lambda \cap S_{\tilde{\lambda}} = \emptyset$  ou  $S_\lambda = S_{\tilde{\lambda}}$ .

**Observação 1.1.34.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $S \subset X$  um conjunto qualquer. A última proposição nos diz que o conjunto formado pelas componentes conexas de  $S$  constitui uma partição de  $S$ .

**Proposição 1.1.35.** *Um conjunto  $C$  é conexo se e só se possui uma única componente conexa.*

**Prova:** Se  $C$  é conexo, dado  $x \in C$ , sua componente conexa  $C_x \supset C$ , por definição, já que  $C_x$  é união de todos os conexos de  $C$  contendo  $x$ . Como a outra inclusão é imediata, temos que  $C_x = C$ ,  $\forall x \in C$ , logo  $C$  possui uma única componente conexa. Por outro lado, se  $C_x$  é a única componente conexa de  $C$ , temos que dado  $y \in C$ , então  $y \in C_x$ , logo novamente temos  $C = C_x$ .  $\square$

**Observação 1.1.36.** Dada uma componente conexa de um conjunto, esta pode não ser aberta e fechada nesse conjunto, conforme se vê na figura 1.1.1.

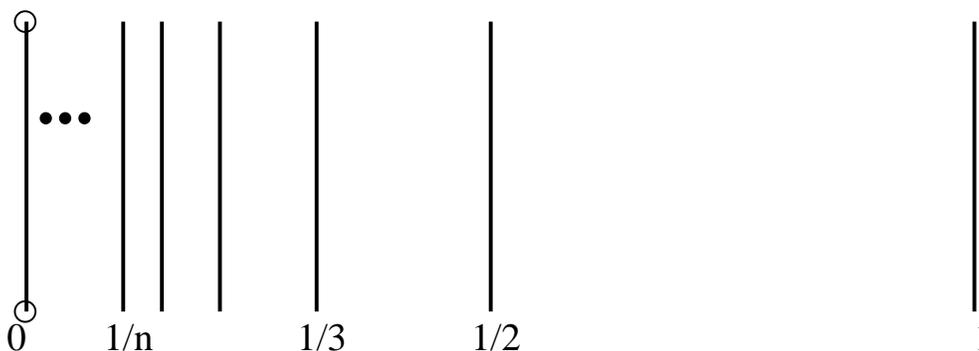


Figura 1.1.1: a componente conexa  $\{0\} \times (0, 1)$  não é aberta no conjunto.

**Definição 1.1.37.** (Conjunto totalmente desconexo). Seja  $X$  um espaço topológico. Um conjunto  $\mathcal{C} \subset X$  é dito totalmente desconexo se para todo  $x \in \mathcal{C}$ , a componente conexa de  $\mathcal{C}$  contendo  $x$  é  $C_x = \{x\}$ .

**Exemplo 1.1.38.** Seja  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$  um conjunto de interior vazio. Então  $\mathcal{C}$  é totalmente desconexo. De fato, como os únicos conexos da reta são os intervalos, qualquer componente conexa de  $\mathcal{C}$  deverá se reduzir a um ponto (intervalo degenerado), já que  $\mathcal{C}$  possui interior vazio.

**Proposição 1.1.39.** Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e seja  $C \subset X$  um conexo. Dado qualquer  $\tilde{C}$  tal que  $C \subset \tilde{C} \subset \overline{C}$ , então  $\tilde{C}$  é conexo.

**Prova:** Suponha que existe uma cisão não trivial de  $\tilde{C}$ . Então existem abertos  $A$  e  $B$  disjuntos tais que  $A \cup B \supset \tilde{C}$  e  $A \cap \tilde{C} \neq \emptyset$  e  $B \cap \tilde{C} \neq \emptyset$ . Sejam  $\tilde{a} \in A \cap \tilde{C}$ ,  $\tilde{b} \in B \cap \tilde{C}$ . Como  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  em particular pertencem a  $\overline{C}$ , temos que existem  $a \in A \cap C$  e  $b \in B \cap C$ . Mas  $C \subset \tilde{C} \subset A \cup B$  então como  $a \in A \cap C \neq \emptyset$ ,  $b \in B \cap C \neq \emptyset$ , temos que  $A$  e  $B$  constituem uma cisão não trivial de  $C$ , o que contradiz o fato de que  $C$  é conexo.

□

**Corolário 1.1.40.** Seja  $S$  um subconjunto de um espaço topológico  $X$ , e seja  $x \in S$ . Então a componente conexa  $C_x \subset S$  contendo  $x$  é fechada em  $S$ .

**Prova:** De fato, pela proposição acima, o fecho  $\overline{C_x} \subset S$  da componente conexa  $C_x$  é um conexo fechado em  $S$  contendo  $x$ . Como a componente  $C_x$  contém qualquer conexo desse tipo, concluímos que  $C_x \supset \overline{C_x}$  e sendo óbvia a outra inclusão segue-se que  $C_x$  iguala-se ao seu fecho em  $S$ .

□

Os próximos exemplos nos chamam a atenção de que mesmo na reta o fecho de um conjunto desconexo pode ou não ser conexo.

**Exemplo 1.1.41.** Seja  $S = \mathbb{Q}$ . Pelo exemplo 1.1.38, temos que  $S$  é totalmente desconexo. Entretanto  $\overline{S} = \mathbb{R}$  que é conexo.

**Exemplo 1.1.42.** Tomando  $S = K$ , conjunto de Cantor da reta, segue-se da construção de  $K$  que este não contém nenhum intervalo não degenerado, logo é totalmente desconexo. Por outro lado,  $K$  é fechado, sendo igual ao seu fecho, que é também totalmente desconexo.

## 1.1.2 Conjuntos compactos

**Definição 1.1.43.** (Cobertura por abertos). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e seja  $S \subset X$ . Uma *cobertura por abertos* de  $S$  é uma coleção de abertos  $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$  tal que

$$\cup_{A_\lambda \in \mathcal{C}} A_\lambda \supset S.$$

Uma *subcobertura* de  $S$  (subentendida no contexto uma cobertura por abertos  $\mathcal{C}$ ) é qualquer subcoleção  $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$  cuja união ainda cobre  $S$ , isto é,

$$\cup_{A_\lambda \in \mathcal{C}_0} A_\lambda \supset S.$$

Muitas vezes escreve-se simplesmente  $\cup A_\lambda \supset S$  para designar que a coleção  $\mathcal{C} = \{A_\lambda\}$  é uma cobertura de  $S$ . Uma subcobertura  $\mathcal{C}_0$  é dita *enumerável* se for constituída de uma quantidade enumerável de abertos (infinita ou não); é dita *finita* se for constituída por uma quantidade finita por abertos, isto é,

$$\mathcal{C}_0 = \{A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_k}\}, \text{ com } \cup_{j=1}^k A_{\lambda_j} \supset S.$$

**Definição 1.1.44.** (Conjunto compacto). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico. Um conjunto  $K \subset X$  é dito *compacto* se toda cobertura por abertos de  $K$  admitir (isto é, possuir) uma subcobertura finita.

**Observação 1.1.45.** Na definição de conjunto compacto, tanto faz considerarmos os abertos da cobertura de um conjunto  $K$  em um espaço topológico  $X$  como sendo abertos de  $X$  ou abertos de  $K$  na topologia induzida por  $X$  (vide exemplo 1.1.4 da página 2). Realmente, suponha que  $K$  é compacto (na definição acima, sem uso da topologia induzida) e tome qualquer cobertura

de  $K$  por abertos em  $K$ . Tal cobertura será da forma  $\cup(A_\lambda \cap K)$ , com cada  $A_\lambda$  aberto em  $X$ . Como

$$K \subset \cup(A_\lambda \cap K) = (\cup A_\lambda) \cap K,$$

temos que  $\cup A_\lambda \supset K$ , o que implica, como  $K$  é compacto, que existem  $A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_q}$  tais que

$$\cup_{j=1}^q A_{\lambda_j} \supset K \Rightarrow (\cup_{j=1}^q A_{\lambda_j}) \cap K = \cup_{j=1}^q (A_{\lambda_j} \cap K) \supset K,$$

ou seja, qualquer cobertura de  $K$  por abertos em  $K$  admite subcobertura finita. Agora suponha reciprocamente que qualquer cobertura de  $K$  por abertos em  $K$  admita subcobertura finita, e seja  $\cup A_\lambda$  uma cobertura de  $K$  por abertos em  $X$ . Daí, por  $\cup(A_\lambda \cap K) = (\cup A_\lambda) \cap K \supset K$  concluímos que  $\{A_\lambda \cap K\}$  constitui uma cobertura de  $K$  por abertos em  $K$ , admitindo por hipótese uma subcobertura finita  $\{A_{\lambda_1} \cap K, \dots, A_{\lambda_q} \cap K\}$ . Donde concluímos que

$$K \subset \cup_{j=1}^q (A_{\lambda_j} \cap K) = (\cup_{j=1}^q A_{\lambda_j}) \cap K \Rightarrow K \subset \cup_{j=1}^q A_{\lambda_j},$$

ou seja,  $\cup A_\lambda$  admite subcobertura finita, e portanto  $K$  é compacto.

Uma caracterização muitas vezes útil dos conjuntos compactos, equivalente à definição acima, é dada com o auxílio do seguinte conceito:

**Definição 1.1.46.** (Propriedade da intersecção finita). Uma família (possivelmente não enumerável)  $(F_\lambda), \lambda \in \Lambda$  de conjuntos fechados  $F_\lambda$  de um espaço topológico  $X$  é dita ter a *propriedade da intersecção finita* (abreviadamente, *p.i.f.*) se toda sua subcoleção finita  $\{F_{\lambda_1}, \dots, F_{\lambda_k}\} \subset \{F_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  possui intersecção

$$F_{\lambda_1} \cap \dots \cap F_{\lambda_k} \neq \emptyset.$$

**Proposição 1.1.47.** *Seja  $X$  um espaço topológico. Então  $K \subset X$  é compacto  $\Leftrightarrow$  toda família  $(F_\lambda), \lambda \in \Lambda$  de fechados  $F_\lambda \subset K$  (fechados em  $K$ , na topologia induzida) com a propriedade da intersecção finita possui intersecção*

$$\cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset.$$

**Prova:** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $K$  compacto, e  $(F_\lambda), \lambda \in \Lambda$  uma família de subconjuntos fechados em  $K$  com a propriedade da intersecção finita. Suponha por absurdo que  $\cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \emptyset$ . Denotando por  $F_\lambda^c$  o complementar de  $F_\lambda$  em  $K$ , então

$$\cup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c = (\cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda)^c = \emptyset^c = K,$$

o que significa que  $\cup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c$  constitui uma cobertura por abertos de  $K$ . Entretanto, tal cobertura não admite subcobertura finita: dada qualquer coleção finita

$$\{F_{\lambda_1}^c, \dots, F_{\lambda_q}^c\} \subset \{F_\lambda^c, \lambda \in \Lambda\},$$

temos

$$\cup_{j=1}^q F_{\lambda_j}^c = (\cap_{j=1}^q F_{\lambda_j})^c \neq (\emptyset)^c = K,$$

o que significa que a cobertura  $\{F_\lambda^c, \lambda \in \Lambda\}$  de  $K$  não admite subcobertura finita, absurdo, pois  $K$  é compacto.

( $\Leftarrow$ ) Agora seja  $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supset K$  uma cobertura por abertos (em  $K$ ) e suponha por absurdo que  $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  não admita subcobertura finita. Daí, a família de fechados em  $K$   $\{A_\lambda^c \cap K, \lambda \in \Lambda\}$  possui a propriedade da intersecção finita, pois dada qualquer subcoleção finita

$$\{A_{\lambda_1}^c \cap K, \dots, A_{\lambda_q}^c \cap K\} \subset \{A_\lambda^c \cap K, \lambda \in \Lambda\},$$

temos

$$\cap_{j=1}^q (A_{\lambda_j}^c \cap K) = (\cap_{j=1}^q A_{\lambda_j}^c) \cap K = (\cup_{j=1}^q A_{\lambda_j})^c \cap K \neq \emptyset.$$

(A última desigualdade acima ocorre porque  $\cup_{j=1}^q A_{\lambda_j} \not\supset K$ , o que implica que algum ponto de  $K$  pertence a  $(\cup_{j=1}^q A_{\lambda_j})^c$ .) Todavia,

$$\cap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda^c \cap K) = (\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c) \cap K = (\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c \cap K = \emptyset,$$

o que é absurdo, pois por hipótese toda família de fechados em  $K$  com a propriedade da intersecção finita possui intersecção não vazia.  $\square$

**Proposição 1.1.48.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $K \subset X$  um compacto. Se  $F \subset K$  é fechado em  $K$ , então  $F$  é compacto.*

**Prova:** Seja  $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supset F$  uma cobertura por abertos de  $F$ . Então  $(\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cup F^c$  é uma cobertura por abertos de  $K$ . Como  $K$  é compacto, existem  $A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_q}$  tais que  $(\cup_{j=1}^q A_{\lambda_j}) \cup F^c \supset K$ . Mas tal implica que  $\cup_{j=1}^q A_{\lambda_j} \supset F$ , e portanto a cobertura (arbitrária) de  $F$  admite subcobertura finita, donde concluímos que  $F$  é compacto.  $\square$

Para a próxima proposição relacionando compactos e fechados, necessitamos da seguinte definição:

**Definição 1.1.49.** (Espaço topológico Hausdorff). Seja  $X$  um espaço topológico.  $X$  é dito *Hausdorff* se dados  $x, y \in X$ , com  $x \neq y$ , existem abertos  $U_x \ni x$  e  $U_y \ni y$  tais que  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

**Proposição 1.1.50.** *Seja  $X$  um espaço topológico Hausdorff. Se  $K \subset X$  é compacto, então para todo ponto  $x \in K^c$ , existem abertos  $A \supset K$  e  $U \supset \{x\}$  tais que  $A \cap U = \emptyset$ .*

**Prova:** Para cada ponto  $y \in K$ , escolha um aberto  $A_y \ni y$  e outro aberto  $U_{x,y} \ni x$  tais que  $A_y \cap U_{x,y} = \emptyset$ . Como  $K$  é compacto, a cobertura  $\cup_{y \in K} A_y$  admite uma subcobertura finita  $\cup_{j=1}^q A_{y_j} \supset K$ . Daí, tome

$$A := \cup_{j=1}^q A_{y_j} \text{ e } U := \cap_{j=1}^q U_{x,y_j}.$$

Só falta conferirmos que  $A \cap U = \emptyset$ . Para tal, basta escrevermos

$$\begin{aligned} A \cap U &= (\cup_{j=1}^q A_{y_j}) \cap (\cap_{j=1}^q U_{x,y_j}) = \\ &= \cup_{j=1}^q (A_{y_j} \cap (\cap_{i=1}^q U_{x,y_i})) \subset \cup_{j=1}^q (A_{y_j} \cap U_{x,y_j}) = \emptyset. \end{aligned}$$

□

**Corolário 1.1.51.** *Seja  $X$  um espaço topológico Hausdorff e  $K \subset X$  um compacto. Então  $K$  é fechado.*

**Prova:** Seja  $K \subset X$  um compacto e para cada  $x \in K^c$  seja  $U_x \ni x$  um aberto tal que  $U_x \cap K = \emptyset$ , obtido aplicando-se a proposição 1.1.50 acima. Daí,  $K^c = \cup_{x \in K^c} U_x$ , logo  $K^c$  é aberto e seu complementar, que é  $K$  é fechado.

□

**Proposição 1.1.52.** *Seja  $X$  um espaço topológico Hausdorff, e seja  $\mathcal{K} = \{K_\lambda \subset X\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma coleção de compactos não vazios totalmente ordenada, isto é, dados  $K_{\hat{\lambda}}, K_{\check{\lambda}} \in \mathcal{K}$ , acontece  $K_{\hat{\lambda}} \subset K_{\check{\lambda}}$  ou  $K_{\hat{\lambda}} \supset K_{\check{\lambda}}$ . Então*

$$K = \cap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \neq \emptyset$$

e  $K$  é compacto.

**Prova:** Fixe  $\hat{K} = K_{\hat{\lambda}} \in \mathcal{K}$  e note que

$$\cap_{\lambda \in \Lambda, K_\lambda \subset \hat{K}} K_\lambda = \hat{K}.$$

Logo, podemos nos ater aos  $K_\lambda \subset \hat{K}$ . Cada um de tais conjuntos é fechado, pois é compacto em espaço topológico Hausdorff. Logo, sua intersecção  $K$  também é fechada. Então  $K$  é um fechado contido no compacto  $\hat{K}$ , logo é compacta. Como

$$\{K_\lambda \subset \hat{K}; K_\lambda \in \mathcal{K}\}$$

é uma família de fechados de  $\hat{K}$  com a propriedade da intersecção finita, temos que sua intersecção  $K \neq \emptyset$ . □

**Corolário 1.1.53.** *Se  $X$  é um espaço topológico Hausdorff, e  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência de compactos não vazios tal que  $K_0 \supset K_1 \supset \dots$ , então*

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

*é compacta não vazia.*

**Prova:** Aplicação imediata da proposição acima. □

**Definição 1.1.54.** (Conjunto sequencialmente compacto). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico. Um conjunto  $K \subset X$  é dito *sequencialmente compacto* se toda seqüência  $(x_j)$ ,  $x_j \in K, \forall j \in \mathbb{N}$  possuir uma subsequência  $(x_{j_r})$  convergente a um ponto  $x \in K$ .

**Definição 1.1.55.** (Base de vizinhanças). Seja  $(X, \mathcal{T})$ , um espaço topológico. Dado um ponto  $x \in X$  uma *base de vizinhanças* em  $x$  é uma subcoleção  $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{T}$  de abertos contendo  $x$  tal que todo aberto de  $\mathcal{T}$  que contenha  $x$  contém algum elemento  $B \in \mathcal{B}(x)$ . Se o espaço  $X$  for tal que para cada  $x$  puder-se tomar uma base de vizinhanças  $\mathcal{B}(x)$  enumerável, dizemos simplesmente que  $X$  é um espaço com *base de vizinhanças enumerável*.

**Proposição 1.1.56.** *Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico com base de vizinhanças enumerável. Se  $K \subset X$  é compacto, então  $K$  é sequencialmente compacto.*

**Prova:** Seja  $(x_j) : \mathbb{N} \rightarrow K$  uma seqüência tomando valores em  $K$ . Note que existe subsequência  $x_{j_l}$  convergindo para um certo  $x \in K$ , se, e só se para todo aberto  $A \ni x$ ,  $\#\{j, x_j \in A\} = +\infty$ . Provemos essa última afirmação. Primeiro, suponha que exista  $x_{j_l} \rightarrow x$ . Então dado um aberto  $A \ni x$ , pela definição de convergência, a quantidade de índices  $j_l$  tais que  $x_{j_l} \notin A$  é finita,

o que quer dizer que  $\#\{j, x_j \in A\} = +\infty$ . Reciprocamente, suponha que para todo aberto  $A \ni x$ ,  $\#\{j, x_j \in A\} = +\infty$ . Como o espaço tem base de vizinhanças enumerável, podemos supor que  $\mathcal{B}(x) := \{B_k, k \in \mathbb{N}\}$  seja uma base de vizinhanças em  $x$ . Ademais, podemos assumir que  $B_{k+1} \subset B_k, \forall k \in \mathbb{N}$ , pois se este não fosse o caso poderíamos considerar

$$\tilde{\mathcal{B}}(x) := \{\cap_{j=1}^k B_j, B_j \in \mathcal{B}, k \in \mathbb{N}\},$$

que vemos claramente ser uma base de vizinhanças em  $x$  composta por abertos encaixantes. Assim, para cada  $B_l, l \in \mathbb{N}$  tomemos  $x_{j_l} \in B_l$ . Afirmamos que  $x_{j_l} \rightarrow x$ . De fato, dado um aberto  $A \ni x$  qualquer, da definição de base de vizinhanças em  $x$ , existe  $B_{l_0} \ni B_{l_0} \subset A$ . Como os abertos  $B_l \in \mathcal{B}(x)$  são sem perda de generalidade assumidos encaixantes, temos que  $x_{j_l} \in B_{l_0} \subset A, \forall l \geq l_0$ , ou seja,  $x_{j_l} \rightarrow x$ , concluindo a prova da afirmação.

Agora, continuemos a prova da proposição. Suponha por absurdo que  $(x_j)$  não possua subsequência convergente a um ponto de  $x \in K$ . Então devido à afirmação provada no último parágrafo, para cada  $x \in K$  existe um aberto  $A_x \ni x$  tal que  $c(x) := \#\{j, x_j \in A_x\} < +\infty$ . Temos por conseguinte que  $\cup_{y \in K} A_y \supset K$ . Como  $K$  é compacto, existe uma subcobertura finita  $\{A_{y_1}, \dots, A_{y_r}\}, \cup_{i=1}^r A_{y_i} \supset K$ . Mas cada  $A_{y_i}, i = 1, \dots, r$  contém apenas as imagens  $x_j$  correspondentes a um número finito de índices  $j \in \mathbb{N}$ , o que é absurdo, pois  $\{x_j, j \in \mathbb{N}\} \subset K \subset \cup_{i=1}^r A_{y_i}$ , ou seja, algum  $A_{y_i}$  teria que ter  $c(y_i) = +\infty$ . □

## 1.2 Aplicações contínuas

**Definição 1.2.1.** (Aplicação contínua). Sejam  $(X, \mathcal{T}), (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$  espaços topológicos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  é dita *contínua* se dado qualquer aberto  $\tilde{A} \subset \tilde{X}$ ,  $f^{-1}(\tilde{A})$  é um aberto  $X$ .

**Definição 1.2.2.** (Aplicação contínua no ponto  $x$ ). Sejam  $(X, \mathcal{T}), (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$  espaços topológicos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  é dita *contínua no ponto*  $x \in X$  se dado qualquer aberto  $\tilde{A} \ni f(x)$ , existe um aberto  $A \ni x$  tal que  $f(A) \subset \tilde{A}$ .

As duas noções de continuidade acima se relacionam da seguinte forma:

**Proposição 1.2.3.** Sejam  $(X, \mathcal{T}), (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$  espaços topológicos,  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  uma aplicação. Então  $f$  é contínua  $\Leftrightarrow f$  é contínua em  $x \in X, \forall x \in X$ .

**Prova:** ( $\Rightarrow$ ) Se  $f$  é contínua, dado  $x \in X$  e um aberto  $\tilde{A} \ni f(x)$ ,  $f^{-1}(\tilde{A})$  é aberto e contém  $x$ . Em particular,  $f(f^{-1}(\tilde{A})) \subset \tilde{A}$  o que implica que  $f$  é contínua em  $x \in X$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\tilde{A} \subset \tilde{X}$  um aberto. Daí, para cada  $x \in f^{-1}(\tilde{A})$ , existe um aberto  $A_x \ni x$  tal que  $f(A_x) \subset \tilde{A}$ , donde obtemos  $A_x \subset f^{-1}(\tilde{A})$ . Como consequência, podemos escrever

$$f^{-1}(\tilde{A}) = \cup_{x \in f^{-1}(\tilde{A})} A_x \Rightarrow f^{-1}(\tilde{A}) \text{ é aberto.}$$

Como  $\tilde{A} \subset \tilde{X}$  é um aberto arbitrário, temos que  $f$  é contínua. □

O próximo teorema nos diz que a composta de aplicações contínuas é contínua:

**Teorema 1.2.4.** *Sejam  $X$ ,  $\tilde{X}$  e  $\hat{X}$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow \tilde{X}$ ,  $g : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$  aplicações contínuas, respectivamente, nos pontos  $a \in X$  e  $\tilde{a} = f(a) \in \tilde{X}$ . Então a aplicação  $h : X \rightarrow \hat{X}$  dada por  $h(x) = g \circ f(x)$ ,  $\forall x \in X$  é contínua no ponto  $a \in X$ . Em particular, se  $f$  e  $g$  são contínuas,  $h = g \circ f$  é contínua.*

**Prova:** Seja  $\hat{A} \ni g(\tilde{a})$  um aberto de  $\hat{X}$ . Como  $g$  é contínua no ponto  $\tilde{a}$ , existe um aberto  $\tilde{A} \ni \tilde{a}$  tal que  $g(\tilde{A}) \subset \hat{A}$ . Similarmente, como  $f$  é contínua em  $a$ , existe um aberto  $A \ni a$  tal que  $f(A) \subset \tilde{A}$ . Donde tiramos que

$$h(A) = g(f(A)) \subset g(\tilde{A}) \subset \hat{A},$$

ou seja,  $h$  é contínua no ponto  $a \in X$ .

Note que se supusermos que  $f$  é contínua em todos os pontos de  $X$  e  $g$  é contínua em todos os pontos de  $f(X)$ , o raciocínio acima nos dá que  $h = g \circ f$  é contínua em todos os pontos de  $X$ , o que pela proposição 1.2 é o mesmo que dizer que  $h$  é contínua. □

A continuidade se relaciona da seguinte forma com os conjuntos compactos e os conjuntos conexos estudados nas seções anteriores:

**Teorema 1.2.5.** *(Aplicações contínuas levam compactos em compactos). Sejam  $(X, \mathcal{T})$  e  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$  espaços topológicos quaisquer e  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  uma aplicação contínua. Se  $K \subset X$  é compacto, então  $f(K)$  é compacto.*

**Prova:** Seja  $\cup_{\lambda} \tilde{A}_{\lambda} \supset f(K)$  uma cobertura qualquer de  $f(K)$  por abertos  $\tilde{A}_{\lambda} \in \tilde{\mathcal{T}}$ . Como  $f$  é contínua,  $f^{-1}(\tilde{A}_{\lambda}) \subset X$  é aberto de  $X$ ,  $\forall \lambda$ . Mas

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}(\cup_{\lambda} \tilde{A}_{\lambda}) = \cup_{\lambda} f^{-1}(\tilde{A}_{\lambda}),$$

ou seja,  $\cup_{\lambda} f^{-1}(\tilde{A}_{\lambda}) \supset K$  é uma cobertura de  $K$  por abertos. Como  $K$  é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita  $f^{-1}(\tilde{A}_{\lambda_1}), \dots, f^{-1}(\tilde{A}_{\lambda_q})$  de  $K$ . Daí, temos

$$f(K) \subset f(f^{-1}(\cup_{j=1}^q \tilde{A}_{\lambda_j})) \subset \cup_{j=1}^q \tilde{A}_{\lambda_j},$$

donde se conclui que  $f(K)$  admite subcobertura finita. Como a cobertura  $\cup_{\lambda} \tilde{A}_{\lambda}$  de  $f(K)$  é arbitrária, segue-se que  $f(K)$  é compacto.  $\square$

**Teorema 1.2.6.** (*Aplicações contínuas levam conexos em conexos*). *Sejam  $(X, \mathcal{T})$  e  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$  espaços topológicos quaisquer e  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  uma aplicação contínua. Se  $C \subset X$  é conexo, então  $f(C)$  é conexo.*

**Prova:** Seja  $\tilde{A} \cup \tilde{B} \supset f(C)$  uma cisão qualquer de  $f(C)$  por abertos disjuntos  $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{T}}$ . Como  $f$  é contínua,  $f^{-1}(\tilde{A}) \subset X$  e  $f^{-1}(\tilde{B}) \subset X$  são abertos de  $X$ . Mas

$$C \subset f^{-1}(f(C)) \subset f^{-1}(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = f^{-1}(\tilde{A}) \cup f^{-1}(\tilde{B}),$$

com  $f^{-1}(\tilde{A}) \cap f^{-1}(\tilde{B}) = f^{-1}(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \emptyset$ , ou seja,  $f^{-1}(\tilde{A}), f^{-1}(\tilde{B})$  é uma cisão de  $C$  por abertos. Como  $C$  é conexo, essa cisão é necessariamente trivial: ou  $f^{-1}(\tilde{A}) \cap C = \emptyset$  ou  $f^{-1}(\tilde{B}) \cap C = \emptyset$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $f^{-1}(\tilde{A}) \cap C = \emptyset$ . Daí, como  $f$  é sobre  $f(X) \supset f(C)$ , temos:

$$f(C) \cap \tilde{A} \subset f(f^{-1}(f(C) \cap \tilde{A})) = f(f^{-1}(f(C)) \cap f^{-1}(\tilde{A})) \subset$$

$$f(C \cap f^{-1}(\tilde{A})) = f(\emptyset) = \emptyset.$$

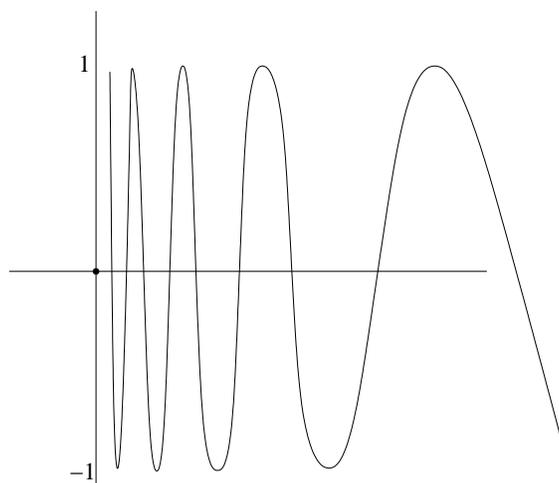
donde se conclui que a cisão de  $f(C)$  é trivial, e por conseguinte  $f(C)$  é conexo.  $\square$

A recíproca dos teoremas acima é, em geral, falsa, como atestam os próximos contraexemplos:

**Exemplo 1.2.7.** Seja  $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função característica dos racionais, isto é, a função dada por

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Então claramente  $\chi_{\mathbb{Q}}$  é descontínua em todos os pontos de  $\mathbb{R}$ , mas como sua imagem é constituída de dois valores apenas, qualquer subconjunto de  $\mathbb{R}$  possui como imagem um conjunto compacto. Ou seja,  $\chi_{\mathbb{Q}}$  leva compactos em compactos, apesar de não ser contínua.



$$f(x) = \sin(1/x), \text{ para } x > 0; f(0) = 0.$$

**Exemplo 1.2.8.** Este exemplo mostra que existem funções que, mesmo descontínuas, levam conexos em conexos. Seja  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Daí,  $f$  é descontínua em  $x = 0$ . Contudo, como os conexos de  $\mathbb{R}$  são exatamente os intervalos, vemos facilmente que  $f$  leva conexos em conexos.

Há ainda a seguinte noção de continuidade:

**Definição 1.2.9.** (Aplicação sequencialmente contínua). Sejam  $X, \tilde{X}$  espaços topológicos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  é dita *sequencialmente contínua em*  $x \in X$  se dada qualquer seqüência  $(x_j)$ , com  $X \ni x_j \rightarrow x$ , a seqüência de pontos em  $\tilde{X}$  dada por  $f(x_j)$  converge a  $f(x)$ . Se  $f$  é sequencialmente contínua em  $x$ ,  $\forall x \in X$ , dizemos simplesmente que  $f$  é *sequencialmente contínua*.

A próxima proposição é um indicativo de que em geral, o conceito de continuidade pode ser mais forte que o de continuidade sequencial:

**Proposição 1.2.10.** Sejam  $X, \tilde{X}$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  uma aplicação contínua em  $x \in X$ . Então  $f$  é sequencialmente contínua em  $x \in X$ .

**Prova:** Seja  $(x_j) : \mathbb{N} \rightarrow X$  uma sequência convergindo a  $x \in X$ . Tome um aberto  $\tilde{A} \subset \tilde{X}$  qualquer. Como  $f$  é contínua em  $x$ , existe um aberto  $A \ni x$  tal que  $f(A) \subset \tilde{A}$ . Como  $x_j$  converge a  $x$ , existe  $j_0$  tal que  $x_j \in A, \forall j \geq j_0$ . Mas tal implica que  $f(x_j) \in \tilde{A}, \forall j \geq j_0$ , e como  $\tilde{A} \ni f(x)$  é um aberto arbitrário, isto implica que  $f(x_j) \rightarrow f(x)$ , ou seja,  $f$  é sequencialmente contínua em  $x$ .  $\square$

**Definição 1.2.11.** (Espaços homeomorfos). Sejam  $X$  e  $\tilde{X}$  espaços topológicos. Um *homeomorfismo* entre  $X$  e  $\tilde{X}$  é uma aplicação bijetiva contínua  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  cuja inversa  $f^{-1} : \tilde{X} \rightarrow X$  também é contínua. Se  $X$  e  $\tilde{X}$  são espaços topológicos tais que haja algum homeomorfismo  $f : X \rightarrow \tilde{X}$ , dizemos que  $X$  e  $\tilde{X}$  são *espaços homeomorfos*.

**Observação 1.2.12.** Em geral, uma aplicação contínua, mesmo que bijetiva, não precisa ter inversa contínua. Um exemplo simples desse fato é a aplicação  $f : [0, 1) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$  dada por:

$$f(x) = e^{2\pi i x}, x \in [0, 1),$$

cuja inversa, se fosse contínua, levaria a esfera unitária (compacta)  $S^1$  em um compacto, o que não é o caso do domínio  $[0, 1)$  de  $f$ .

**Definição 1.2.13.** (Aplicação aberta). Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Uma aplicação (não necessariamente contínua)  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  é dita *aberta* se leva abertos de  $X$  em abertos de  $\tilde{X}$ , isto é, se dado um aberto  $A \subset X$ , então  $f(A)$  é um aberto de  $\tilde{X}$ .

**Definição 1.2.14.** (Aplicação fechada). Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  é dita *fechada* se leva fechados de  $X$  em fechados de  $\tilde{X}$ , isto é, se dado um fechado  $F \subset X$ , então  $f(F)$  é um fechado de  $\tilde{X}$ .

**Observação 1.2.15.** Note que se  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  é bijetiva. Então  $f$  é fechada se e só se é aberta. De fato, se  $f$  é fechada e tomamos um aberto  $A \subset X$ , temos:

$$f(A) = f((A^c)^c) \underset{f \text{ é bijetiva}}{=} (f(A^c))^c,$$

que é aberto de  $\tilde{X}$  pois  $A^c$  é fechado de  $X$ . Da mesma forma se mostra a recíproca.

O próximo teorema e, especialmente, seu corolário, nos dão um critério simples para verificar (em certos casos) a continuidade da inversa de uma aplicação injetiva:

**Teorema 1.2.16.** *Seja  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  uma aplicação (não necessariamente contínua) fechada e injetiva (resp. aberta e injetiva). Então a aplicação  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  é contínua.*

**Prova:** Sem perda, consideremos  $f : X \rightarrow f(X)$ , a qual será simultaneamente aberta e fechada e ainda mais, sobrejetiva. Seja  $F \subset X$  um fechado arbitrário. Como  $f$  é fechada,  $f(F) = \tilde{F}$  é fechado de  $\tilde{X}$ , donde obtemos

$$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F) = \tilde{F},$$

ou seja,  $f^{-1}$  é contínua. □

**Corolário 1.2.17.** *Seja  $K$  um espaço topológico compacto e seja  $Y$  um espaço topológico Hausdörff. Se  $f : K \rightarrow Y$  é contínua e injetiva, então  $f$  é um homeomorfismo sobre sua imagem  $f(K)$ .*

**Prova:** De fato, basta mostrarmos que  $f : K \rightarrow Y$  é uma aplicação fechada. Dado um fechado  $F \subset K$ , como  $K$  é compacto, temos que  $F$  também é. Da continuidade de  $f$  sabemos que  $f$  leva compactos em compactos, o que implica que  $f(F) \subset Y$  é compacto.

Como  $Y$  é Hausdörff, segue-se que  $f(F)$  sendo compacto, é fechado de  $Y$ , concluindo a prova. □

### 1.3 Exercícios

1. Seja  $X := \mathbb{R}$  e  $\mathcal{T} := \{\cup_{j=1}^{\infty} I_j\}$ , conforme o exemplo 1.1.2. Mostre que  $\mathcal{T}$  é uma topologia na reta.

Sugestão: a parte mais delicada do exercício é mostrar que a união arbitrária (não apenas enumerável) de elementos de  $\mathcal{T}$  está em  $\mathcal{T}$ . Para tal, é necessário usar o fato de que na reta vale a propriedade de Lindelöf. Veja a próxima seção deste livro.

2. Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $A \in \tau$  um aberto. Mostre que a fronteira  $\partial A$  de  $A$  possui interior vazio. Conclua também que se  $F$  é fechado, sua fronteira  $\partial F$  possui interior vazio.
3. Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico e seja  $S \subset X$  um conjunto qualquer. Mostre que a fronteira  $\partial S$  de  $S$  é um conjunto fechado.
4. Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $S \subset X$  um subconjunto qualquer. Mostre que o fecho  $\bar{S} = \text{int}(S) \cup \partial S$ .
5. Dê exemplo de um espaço topológico  $X$  e de um conjunto  $S$  tal que a fronteira da fronteira de  $S$ , isto é,  $\partial(\partial S)$  seja vazia mas tal que  $\partial S \neq \emptyset$ .
6. Seja  $X$  um espaço topológico e  $Y \subset X$  um conjunto com um número finito de componentes conexas. Mostre que cada uma das componentes conexas de  $Y$  é aberta e fechada em  $Y$ .
7. Seja  $X$  um espaço topológico Hausdorff. Mostre que se  $K$  e  $\hat{K}$  são subconjuntos compactos disjuntos de  $X$ , então existem abertos (de  $X$ )  $A \supset K$  e  $\hat{A} \supset \hat{K}$  tais que  $A \cap \hat{A} = \emptyset$ .
8. Seja  $X$  um espaço topológico Hausdorff, e seja  $\mathcal{K} = \{K_\lambda \subset X\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma coleção de compactos conexos não vazios totalmente ordenada. Mostre que

$$K = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \neq \emptyset$$

e  $K$  é compacto conexo. Se supuséssemos que os  $K_\lambda$  constituem uma coleção totalmente ordenada de conexos não compactos sua intersecção seria necessariamente conexa? Prove ou dê contra-exemplo.

9. Seja  $X$  um espaço topológico. Um ponto  $x \in X$  é dito isolado se existir algum aberto  $B \subset X$  tal que  $B = \{x\}$ . Mostre que se  $X$  é conexo Hausdorff e possui algum ponto isolado  $x$ , então  $X = \{x\}$ . O mesmo resultado vale se  $X$  é conexo não Hausdorff? Prove ou dê um contra-exemplo.
10. Seja  $X$  um espaço topológico e seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Seja ainda  $(x_n), x_n \in X$  convergindo a  $x \in X$  e suponha que existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_n) \leq r, \forall n \in \mathbb{N}$ . Então  $f(x) \leq r$ .

11. Sejam  $X$  e  $\tilde{X}$  dois espaços topológicos e  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  uma aplicação contínua, e  $S \subset X$ . Mostre que dotando  $S$  com a topologia induzida por  $X$ , a restrição  $f|_S : S \rightarrow \tilde{X}$  é contínua. Dotando também  $f(S)$  com a topologia induzida por  $\tilde{X}$ , mostre também que  $f|_S : S \rightarrow f(S)$  é contínua.
12. Sejam  $X$  e  $\tilde{X}$  dois espaços topológicos e  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  uma aplicação contínua. Mostre que se  $C_x \subset X$  é uma componente conexa de um ponto  $x \in X$ , então  $f(C_x) \subset \tilde{C}_{f(x)}$ , onde  $\tilde{C}_{f(x)}$  é a componente conexa de  $f(x)$  na imagem  $f(X)$ . Mostre que se  $f$  é um homeomorfismo sobre sua imagem, então  $f(C_x) = \tilde{C}_{f(x)}$ .
13. Sejam  $X$  e  $\tilde{X}$  dois espaços topológicos e  $h : X \rightarrow \tilde{X}$  um homeomorfismo. Mostre que  $X$  possui o mesmo número de componentes conexas que  $\tilde{X}$ .

## 1.4 Espaços métricos

Nessa seção estudaremos uma classe importante de espaços topológicos, a saber, a classe dos espaços métricos.

**Definição 1.4.1.** (Métrica e espaço métrico). Uma *métrica* (também chamada de *distância*) em um conjunto  $Y \neq \emptyset$  é uma função  $d : Y \times Y \rightarrow [0, +\infty)$  tal que, dados quaisquer  $x, y, z \in Y$ , valem:

$$\text{d1) } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$\text{d2) } d(x, y) = d(y, x).$$

$$\text{d3) } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (desigualdade triangular).}$$

O par ordenado  $(Y, d)$  é chamado de *espaço métrico*. Em geral, por um abuso de linguagem, diz-se que  $Y$  é um espaço métrico, subentendendo-se uma métrica  $d$  a ele associada.

**Definição 1.4.2.** (Bola aberta). Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Dado  $x \in X$  e  $r \in \mathbb{R}^+$  qualquer definimos a *bola aberta* centrada em  $x$  e raio  $r$  como o conjunto

$$B(x, r) := \{y \in X; d(x, y) < r\}.$$

Dado um espaço métrico  $(X, d)$  podemos associar a ele a coleção  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ , cujos elementos são uniões arbitrárias de bolas abertas de  $X$ . A próxima proposição nos diz que tal coleção é uma topologia de  $X$ :

**Proposição 1.4.3.** *A coleção*

$$\mathcal{T} := \{A \subset X : A = \cup B_\lambda, \text{ com } B_\lambda = B(x_\lambda, r_\lambda), \text{ para algum } x_\lambda \in X \text{ e } r_\lambda \in \mathbb{R}^+\}$$

*é uma topologia de  $X$ .*

**Prova:** Tomando  $r = 0$  e  $x \in X$  qualquer, obtemos que  $\emptyset = B(x, r) \in \mathcal{T}$ . Similarmente,

$$X = \cup_{n \in \mathbb{N}} B(x, n) \in \mathcal{T}.$$

A união arbitrária de conjuntos que são cada um uma união arbitrária de bolas abertas é claramente uma união arbitrária de bolas abertas. Portanto, só nos resta mostrar que  $\mathcal{T}$  é fechada para intersecções finitas de seus elementos. Para isso, basta vermos que se

$$A := \cup_\lambda B_\lambda \text{ e } \tilde{A} := \cup_{\tilde{\lambda}} B_{\tilde{\lambda}}$$

então  $A \cap \tilde{A} \in \mathcal{T}$ . Mas

$$A \cap \tilde{A} = (\cup_\lambda B_\lambda) \cap (\cup_{\tilde{\lambda}} B_{\tilde{\lambda}}) = \cup_{(\lambda, \tilde{\lambda})} (B_\lambda \cap B_{\tilde{\lambda}}),$$

o que significa que basta que mostremos que dadas duas bolas abertas  $B$  e  $\tilde{B}$ , sua intersecção pode ser expressa como uma união (possivelmente não enumerável) de bolas. De fato, seja  $x \in B \cap \tilde{B}$ . Como  $x \in B$ , existe uma bola  $B(b, r) \subset B$  tal que  $x \in B(b, r)$ . Igualmente, como  $x \in \tilde{B}$ , existe uma bola  $B(\tilde{b}, \tilde{r}) \subset \tilde{B}$  tal que  $x \in B(\tilde{b}, \tilde{r})$ . Seja

$$r_x := \min\{r - d(x, b), \tilde{r} - d(x, \tilde{b})\} \text{ e } B_x = B(x, r_x).$$

Afirmamos que  $B_x \subset B \cap \tilde{B}$ . De fato, dado  $y \in B_x$  temos:

$$d(y, b) \leq d(y, x) + d(x, b) < r - d(x, b) + d(x, b) = r \Rightarrow y \in B(b, r) \subset B;$$

$$d(y, \tilde{b}) \leq d(y, x) + d(x, \tilde{b}) < \tilde{r} - d(x, \tilde{b}) + d(x, \tilde{b}) = \tilde{r} \Rightarrow y \in B(\tilde{b}, \tilde{r}) \subset \tilde{B},$$

o que implica que  $B_x \subset B \cap \tilde{B}$ , como afirmamos. Como  $x \in B \cap \tilde{B}$  é qualquer, concluímos que

$$\cup_{x \in B \cap \tilde{B}} B_x = B \cap \tilde{B},$$

logo  $B \cap \tilde{B} \in \mathcal{T}$ , concluindo a proposição.  $\square$

**Definição 1.4.4.** (Topologia dada pela métrica). A topologia definida por  $\mathcal{T} := \{A \subset X : A = \cup B_\lambda, \text{ com } B_\lambda = B(x_\lambda, r_\lambda), \text{ para algum } x_\lambda \in X \text{ e } r_\lambda \in \mathbb{R}^+\}$  é chamada de *topologia dada pela métrica* ou *gerada pelas bolas abertas* de  $X$ . Note que a coleção das bolas abertas de  $X$  constitui uma base dessa topologia (confira def. 1.1.10, na página 3).

**Observação 1.4.5.** Note que o argumento que usamos na proposição 1.4 para mostrar que um ponto  $x$  da intersecção de duas bolas abertas possui uma bola de centro no dito ponto e contida na intersecção pode ser usado, sem alterações, para mostrar que dado um ponto  $x$  pertencente a um aberto  $A$  da topologia  $\mathcal{T}$  dada pela métrica de  $X$ , existe uma bola  $B_x = B(x, r_x) \subset A$ . Por conseguinte, todo aberto  $A$  de  $\mathcal{T}$  se escreve como

$$A := \cup_{x \in A} B_x, \text{ onde } B_x = B(x, r_x) \subset A.$$

**Exemplo 1.4.6.** (Subconjunto de espaço métrico é espaço métrico). Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $Y \subset X$  um subconjunto não vazio. Então, a restrição da métrica  $d|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow [0, +\infty)$  é uma métrica em  $Y$ .

**Exemplo 1.4.7.** (A Reta). Seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais. Definimos a distância em  $\mathbb{R}$  como a aplicação  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  dada por

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Deixamos ao leitor a verificação das propriedades de métrica da aplicação acima.

Os próximos exemplos dão conta em quão exóticos (e sem estrutura algébrica) podem ser os espaços métricos.

**Exemplo 1.4.8.** (Distância zero-um). Seja  $X \neq \emptyset$  um conjunto qualquer. Definimos a métrica zero-um em  $X$  como a aplicação  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  dada por:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y; \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

É fácil ver que  $d$  possui as propriedades que tornam  $X$  um espaço métrico. Note que qualquer ponto de  $X$  é aberto e fechado com a topologia dada pela métrica, o que torna  $X$  um espaço topológico totalmente desconexo. Observe que a topologia associada a essa métrica é  $\tau = \mathcal{P}(X)$ . (todo subconjunto de  $X$  é aberto).

**Exemplo 1.4.9.** Seja  $X := \{ \text{Gracie}, \text{Mimi}, \text{Fusquinha} \}$  o conjunto das três gatinhas da esposa do autor. Definimos a distância (emocional)  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  por:

$$\begin{aligned} d(\text{Gracie}, \text{Fusquinha}) &= d(\text{Fusquinha}, \text{Gracie}) = 1; \\ d(\text{Gracie}, \text{Mimi}) &= d(\text{Mimi}, \text{Gracie}) = 1/3; \\ d(\text{Mimi}, \text{Fusquinha}) &= d(\text{Fusquinha}, \text{Mimi}) = 2/3, \end{aligned}$$

e, é claro, a distância de qualquer gata a ela mesma é definida como zero. Este exemplo é muito similar ao anterior, porém enfatiza ainda mais que um espaço métrico não necessita sequer ser um subconjunto de um espaço vetorial.

Mesmo com todo o exotismo dos últimos exemplos, a topologia oriunda de uma métrica possui boas propriedades, afirmação cujo sentido deixamos mais preciso na próxima observação.

**Observação 1.4.10.** Todo espaço métrico  $X$  é um espaço topológico Hausdörff: dados dois pontos distintos  $x, y \in X$ , as bolas abertas  $B(x, d(x, y)/2)$  e  $B(y, d(x, y)/2)$  são disjuntas e contém  $x$  e  $y$  respectivamente. Ademais, todo espaço métrico possui base de vizinhanças enumerável, dada em cada ponto  $x \in X$  pelas bolas  $B(x, 1/n), n \in \mathbb{N}$ . Entretanto, espaços métricos podem não ter base de abertos enumerável.

**Definição 1.4.11.** (Conjunto denso). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico. Um conjunto  $D \subset X$  é dito *denso* em  $X$  se dado qualquer aberto não vazio  $A \in \mathcal{T}$ , existe algum ponto  $a \in D \cap A$ . Se  $Y \subset X$ , um conjunto  $D \subset Y$  é *denso* em  $Y$  se é denso no espaço topológico  $Y$  dotado da topologia induzida por  $X$ .

**Definição 1.4.12.** (Espaço separável). Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico.  $X$  é dito *espaço separável* se possuir um subconjunto  $D \subset X$  enumerável e denso.

Para espaços métricos, ser separável é equivalente a possuir base enumerável:

**Teorema 1.4.13.** *Seja  $X$  um espaço métrico. Então as seguintes assertivas sobre  $X$  são equivalentes:*

1.  $X$  possui base enumerável de abertos;

2.  $X$  é separável;
3. Toda cobertura por abertos de  $X$  admite uma subcobertura enumerável (propriedade de Lindelöf).

**Prova:** (1.  $\Rightarrow$  2.) Seja  $\mathcal{B} := \{A_1, \dots, A_n, \dots\}$  uma base enumerável de  $X$ . Para cada  $\emptyset \neq A_j \in \mathcal{B}$ , tomemos  $x_j \in A_j$  e definamos

$$D := \{x_j, x_j \text{ escolhido em } A_j \in \mathcal{B}\}.$$

Daí, dado qualquer aberto não vazio  $A$  de  $X$ , este é união de elementos de  $\mathcal{B}$ , logo contém pelo menos um ponto  $x_j \in A_j \cap D \subset A$ , logo  $D$  é denso em  $X$ .

(2.  $\Rightarrow$  1.) Seja  $D = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset X$  um subconjunto denso enumerável de  $X$ . Seja  $\mathcal{B} := \{B(x_j, q), x_j \in D, q \in \mathbb{Q}^+\}$ .  $\mathcal{B}$  é claramente enumerável. Mostremos que  $\mathcal{B}$  é base de  $X$ . Seja  $A \subset X$  um aberto, e seja  $a \in A$ . Como  $A$  é aberto, existe uma bola  $B(a, r_a) \subset A$ . Como  $D$  é denso, existe  $x \in D$  tal que  $x \in B(a, r_a/4)$ . Em particular, tomando  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $r_a/4 < q < r_a/2$ , temos que  $a \in B(x, q) \subset B(a, r_a) \subset A$ , o que significa que

$$\cup_{\mathcal{B} \ni B_j \subset A} B_j = A,$$

ou seja,  $\mathcal{B}$  é base de  $X$ .

(1.  $\Rightarrow$  3.) Seja  $\mathcal{C} := \{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  uma cobertura qualquer de  $X$  por abertos  $A_\lambda$ . Se  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n, \dots\}$  é uma base enumerável de abertos de  $X$ , tomemos  $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$  a coleção de todos os abertos de  $\mathcal{B}$  contidos em algum  $A_\lambda \in \mathcal{C}$ . Para cada  $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ , escolha  $A(B) \in \mathcal{C}$  tal que  $B \subset A(B)$ . Então a coleção  $\tilde{\mathcal{C}} := \{A(B), B \in \tilde{\mathcal{B}}\}$  é enumerável, visto que  $B \mapsto A(B)$  é uma aplicação sobrejetiva de  $\tilde{\mathcal{B}}$  em  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Afirmamos que  $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$  é uma subcobertura enumerável de  $X$ . De fato, seja  $x \in X$ . Então  $\exists \lambda \in \Lambda$  tal que  $x \in A_\lambda \in \mathcal{C}$ . Como  $\mathcal{B}$  é base, tal  $A_\lambda$  é união de abertos de  $\mathcal{B}$ , logo existe algum  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subset A_\lambda$ . Por definição, esse  $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ . Daí,  $x \in B \subset A(B) \in \tilde{\mathcal{C}}$ . Como  $x \in X$  é arbitrário, concluímos que  $\tilde{\mathcal{C}}$  é subcobertura (enumerável) de  $X$ . (3.  $\Rightarrow$  1.) Dado  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $\mathcal{C}_n := \{B(x, 1/n), x \in X\}$ . Então com  $\mathcal{C}_n$  é uma cobertura de  $X$ , por hipótese admite uma subcobertura enumerável  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{C}_n$ . Definamos  $\mathcal{B} := \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ . Então  $\mathcal{B}$  é enumerável e afirmamos é base de abertos de  $X$ . Realmente, seja  $A \subset X$  um aberto qualquer. Dado  $a \in A$ , existe alguma bola  $B_a = B(a, 2/n_0) \subset A$ , onde  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Ademais,

$a$  pertence a alguma bola de raio  $B = B(x, 1/n_0)$  pertencente a  $\mathcal{B}_{n_0} \subset \mathcal{B}$ . Dado qualquer ponto  $y \in B$ , temos

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < 1/n_0 + 1/n_0 = 2/n_0 \Rightarrow y \in B(a, 2/n_0),$$

ou seja  $B \subset B_a$ , donde concluímos que  $A$  se escreve como união das bolas de  $\mathcal{B}$  contidas em  $A$ . □

Para espaços métricos quaisquer, valem os seguintes resultados:

**Proposição 1.4.14.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $F \subset X$ . Então  $F$  é fechado se e só se  $F$  é sequencialmente fechado.*

**Prova:** Pela proposição 1.1.19, já sabemos que todo subconjunto fechado de um espaço topológico é sequencialmente fechado. Assim, só nos resta provar a recíproca. Assim, procedamos por contradição, supondo que  $F$  não seja fechado. Daí  $F^c$  não é aberto, o que implica pela observação 1.4.5 que existe  $x \in F^c$  tal que nenhuma bola com centro em  $x$  está contida em  $F^c$ . Em particular, para toda bola  $B(x, 1/k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $x_k \in F$ . Dado um aberto  $A$  qualquer contendo  $x$ , este contém alguma bola  $B(x, r_x)$ , a qual conterá  $B(x, 1/k)$ , para todo  $k$  suficientemente grande, digamos, maior ou igual a um certo  $k_0$ . Como  $x_k \in B(x, 1/k_0) \subset A$ ,  $\forall k \geq k_0$ , temos que  $x_k$  converge a  $x \notin F$ , o que implica que  $F$  não é sequencialmente fechado. □

**Lema 1.4.15.** *Seja  $K$  um espaço métrico sequencialmente compacto. Então  $K$  possui base enumerável de abertos.*

**Prova:** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Começemos por mostrar que podemos cobrir  $K$  com um número finito de bolas de raio  $1/n$ . De fato, seja  $x_1 \in K$ , e defina  $B_{1,n} := B(x_1, 1/n)$ . Se  $K \subset B_{1,n}$ , nada mais temos a mostrar. Caso contrário, existe algum  $x_2 \in K \setminus B_{1,n}$ . Tome então a bola  $B_{2,n} := B(x_2, 1/n)$ . Agora suponha que construímos bolas  $B_{1,n}, \dots, B_{m,n}$  tais que quaisquer dois de seus centros distam de pelo menos  $1/n$ . Se a união de tais bolas cobrir  $K$ , provei o que queria. Caso contrário, prossigo na construção: considero  $K \ni x_{m+1} \notin \cup_{j=1}^m B_{j,n}$  e acrescento à minha coleção de bolas  $B_{m+1,n} := B(x_{m+1}, 1/n)$ . Afirmamos que nossa construção necessariamente findará em um número finito  $p(n)$  de passos. Realmente, se esse não fosse o caso, obteríamos uma seqüência  $(x_j)$  de valores  $x_j$  não apenas distintos, mas tais que  $d(x_j, x_k) \geq$

$1/n, \forall j, k$  tais que  $j \neq k$ . Claramente tal sequência não possui subsequência convergente, o que contradiz o fato de que  $K$  é sequencialmente compacto.

Afirmamos que

$$\mathcal{B} := \{B_{j,n}, n \in \mathbb{N}, 1 \geq j \geq p(n)\}$$

constitui uma base (obviamente enumerável) de abertos de  $K$ . Para vermos isso, seja  $A \subset K$  um aberto qualquer. Então, dado  $x \in A$ , existe  $r_x > 0$  tal que  $B(x, r_x) \subset A$ . Por outro lado, seja  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $r_x > 2/n_x$ . Como a união das bolas  $B_{1,n_x}, \dots, B_{p(n_x),n_x}$  cobre  $K$ , uma de tais bolas, digamos  $B_{j,n_x} = B(\tilde{x}, 1/n_x) \ni x$ . Mas dado  $z \in B_{j,n_x}$ , temos:

$$d(z, x) \leq d(z, \tilde{x}) + d(x, \tilde{x}) < 2/n_x < r_x,$$

ou seja  $z \in B(x, r_x) \subset A$ . Em outras palavras,

$$A = \cup_{B_{j,n} \subset A} B_{j,n},$$

o que significa que  $\mathcal{B}$  é base, como queríamos mostrar. □

**Corolário 1.4.16.** *Seja  $K$  um espaço métrico compacto. Então  $K$  possui base enumerável de abertos.*

**Prova:** Vimos na proposição 1.1.2 da página 14 que todo compacto em um espaço topológico com base de vizinhanças enumerável é sequencialmente compacto. Pelo último lema, temos que todo espaço métrico sequencialmente compacto possui base enumerável. □

**Observação 1.4.17.** É claro que o corolário acima sai também diretamente da definição de compacto e do teorema 1.4.13 da página 26.

Para o próximo corolário, é pertinente fazermos antes uma definição:

**Definição 1.4.18.** (Diâmetro de um conjunto). Seja  $X$  um espaço métrico, e seja  $S \subset X$  um subconjunto não vazio. O *diâmetro* de  $S$  é definido como:

$$\text{diam}(S) := \sup\{d(x, y); x, y \in S\}.$$

Caso  $\text{diam}(S) < +\infty$ ,  $S$  é chamado de *conjunto limitado*.

**Observação 1.4.19.** Um argumento padrão mostra facilmente que para todo conjunto  $S \neq \emptyset$  contido em um espaço métrico  $X$ ,  $\text{diam}(S) = \text{diam}(\overline{S})$ .

**Corolário 1.4.20.** *Seja  $K$  um subconjunto sequencialmente compacto de um espaço métrico  $X$ . Então  $K$  é limitado.*

**Prova:** De fato, todo conjunto sequencialmente compacto  $K$  pode ser coberto como união finita  $\cup_{j=1}^q B_j$  de bolas de mesmo raio  $r$ , por exemplo,  $r = 1$ . Se  $B_j = B(x_j, 1)$ ,  $x_j \in K$ , temos que

$$\text{diam}(K) \leq 2 + \max\{d(x_i, x_j), 1 \leq i < j \leq q\}.$$

□

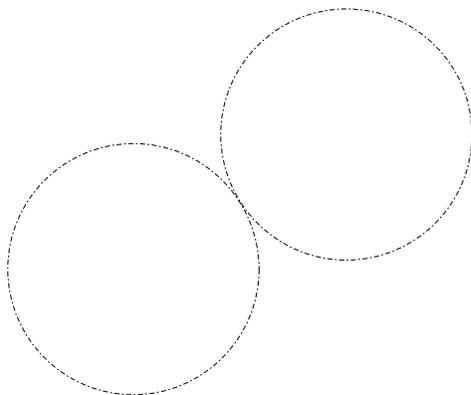
**Proposição 1.4.21.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $K \subset X$ . Então  $K$  é compacto  $\Leftrightarrow K$  é sequencialmente compacto.*

**Prova:** A ida já foi provada na proposição 1.1.2, na página 14. Para a volta, suponha por absurdo que exista uma cobertura  $\cup_{\lambda} A_{\lambda} \supset K$  que não admita subcobertura finita. Em particular, a cobertura de abertos em  $K$  dada por  $\{A_{\lambda} \cap K\}$  não admitiria subcobertura finita. Entretanto, como  $K$  é sequencialmente compacto, pelo último lema este possui base enumerável, o que é equivalente ao teorema de Lindelöf (vide teorema 1.4.13, pag. 26). Ou seja,  $\{A_{\lambda} \cap K\}$  admite uma subcobertura enumerável  $\{A_{\lambda_1} \cap K, \dots\}$  de  $K$ . Note que segundo nossa suposição por absurdo, tal subcobertura também não admite subcobertura finita. Agora, seja  $x_k \in K \setminus (\cup_{j=1}^k A_{\lambda_j})$ . Como  $K$  é sequencialmente compacto,  $x_k$  admite uma subsequência  $x_{k_l}$  convergente a  $x \in K$ . Como  $\cup_{j=1}^{\infty} A_{\lambda_j} \supset K$ , temos que para algum  $j_0$ ,  $x \in A_{\lambda_{j_0}}$ . Contudo, da construção de  $x_k$ , temos que  $x_k \notin A_{\lambda_{j_0}}, \forall k > j_0$ . Em particular, nenhuma subsequência de  $x_k$  pode convergir a  $x \in A_{\lambda_{j_0}}$ , absurdo.

□

**Definição 1.4.22.** (Número de Lebesgue). Seja  $X$  um espaço métrico. Diz-se que uma cobertura de  $S \subset X$  por abertos admite um *número de Lebesgue*  $\delta > 0$  se todo subconjunto não vazio  $\tilde{S} \subset S$  com  $\text{diam}(\tilde{S}) < \delta$  está inteiramente contido em algum aberto da cobertura.

**Exemplo 1.4.23.** O seguinte exemplo mostra que nem toda cobertura de um certo conjunto  $S$  admite um número de Lebesgue. Tome  $S$  como um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  constituído pela união de duas bolas abertas cujas



Tomando  $S$  como o conjunto formado por duas bolas abertas cujas fronteiras se tangenciam em um ponto, temos que a cobertura de  $S$  dada pelas bolas que o compoem não admite número de Lebesgue: podemos tomar pontos arbitrariamente próximos, mas em bolas diferentes.

fronteiras se tangenciam em um único ponto. Tomando como cobertura de  $S$  a coleção das bolas que constituem  $S$ , é fácil tomar-se pontos em bolas distintas mas arbitrariamente próximos. Logo, tal cobertura *não* admite número de Lebesgue.

**Definição 1.4.24.** (Número de Lebesgue no sentido forte.) Diremos que uma cobertura por abertos  $\cup A_j$  de um conjunto  $S \subset X$  possui  $\delta > 0$  como um *número de Lebesgue no sentido forte* se  $S_\delta \subset X$  é tal que  $\text{diam}(S_\delta) < \delta$  e  $S_\delta \cap S \neq \emptyset$ , então existe algum aberto da cobertura que contém  $S_\delta$ .

É claro que um número de Lebesgue no sentido forte para uma cobertura é um número de Lebesgue para a mesma cobertura.

**Teorema 1.4.25.** (*Número de Lebesgue para coberturas de compactos*). Seja  $X$  um espaço métrico e seja  $K \subset X$  um compacto. Qualquer cobertura  $\cup_\lambda A_\lambda$  de  $K$  por abertos admite um número de Lebesgue (no sentido forte)  $\delta > 0$ .

**Prova:** Demonstraremos que dada um cobertura do compacto  $K$ , existe  $\delta > 0$  tal que se um conjunto  $S_\delta \subset X$  é tal que  $S_\delta \cap K \neq \emptyset$  e  $\text{diam}(S_\delta) < \delta$  então  $S_\delta$  está inteiramente contido em algum aberto da cobertura. Sem perda de generalidade, como  $K$  é compacto podemos supor que a cobertura de  $K$  dada é finita. Assim seja  $\{A_1, \dots, A_q\}$  uma coleção finita de abertos tal que  $\cup_{j=1}^q A_j \supset K$ . Suponha por absurdo que para todo  $\delta > 0$  exista  $S_\delta \subset X$  com  $S_\delta \cap K \neq \emptyset$  e  $\text{diam}(S_\delta) < \delta$  e tal que  $\forall A_j \in \{A_1, \dots, A_q\}$ , temos  $S_\delta \not\subset A_j$ .

Para cada  $\delta = 1/n, n \in \mathbb{N}$ , tome então  $x_n \in S_{1/n} \cap K$ . Como  $K$  é compacto, e portanto sequencialmente compacto, podemos admitir existir subsequência convergente  $x_{n_i} \rightarrow x \in K$ . Tal ponto  $x \in K$  está em algum aberto da cobertura, chamemo-lo de  $A_j$ . Daí, existe  $B(x, r) \subset A_j$ . A convergência da sequência  $x_{n_i}$  implica que existe  $i_0$  tal que  $\forall i \geq i_0, x_{n_i} \in B(x, r/2)$ . Por outro lado, existe  $i_1 \geq i_0$  tal que  $\forall i \geq i_1, \text{diam}(S_{1/n_i}) < 1/n_i < r/2$ . Seja  $z \in S_{1/n_{i_1}}$ . Então

$$d(z, x) \leq d(z, x_{j_{i_1}}) + d(x_{j_{i_1}}, x) < \text{diam}(S_{1/n_{i_1}}) + r/2 < r,$$

ou seja,  $S_{1/n_{i_1}} \subset B(x, r) \subset A_j$ , contradizendo a suposição de que  $S_{1/n_{i_1}}$  não estaria contido em nenhum aberto da cobertura.  $\square$

**Proposição 1.4.26.** *Sejam  $(X, d), (\tilde{X}, \tilde{d})$  espaços métricos,  $x \in X$  e  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  uma aplicação. Então  $f$  é contínua em  $x \in X \Leftrightarrow$  dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$ .*

**Prova:**

( $\Rightarrow$ ) Como  $f$  é contínua em  $x$ , dado um aberto  $\tilde{B} = B(f(x), \epsilon)$ , existe um aberto  $x \ni A \subset X$  tal que  $f(A) \subset \tilde{B}$ . Como existe  $x \in A$  e  $A$  é aberto, existe  $\delta > 0$  tal que  $B(x, \delta) \subset A$ , concluindo a prova da ida.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\tilde{A} \subset \tilde{X}$  um aberto contendo  $f(x)$ . Então existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $B(f(x), \epsilon_0) \subset \tilde{A}$ . Por hipótese, existe  $\delta > 0$  tal que

$$f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon_0) \subset \tilde{A},$$

o que implica a continuidade de  $f$  em  $x \in X$ , já que  $\tilde{A} \ni f(x)$  é arbitrário.  $\square$

**Proposição 1.4.27.** *Sejam  $(X, d), (\tilde{X}, \tilde{d})$  espaços métricos,  $x \in X$  e  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  uma aplicação. Então  $f$  é contínua em  $x$  se e só se  $f$  é sequencialmente contínua em  $x$ .*

**Prova:** A ida já foi provada na proposição 1.2.10 da página 18. Para a volta, suponha que  $f$  não seja contínua em  $x \in X$ . Então existem  $\epsilon_0$  e  $\tilde{B} := B(f(x), \epsilon_0) \subset \tilde{X}$  tal que  $\forall \delta > 0$ , temos  $f(B(x, \delta)) \not\subset \tilde{B}$ , o que implica que para cada  $\delta$  existe  $\tilde{x}_\delta \in f(B(x, \delta)) \setminus \tilde{B}$ . Em particular, existe  $x_\delta \in B(x, \delta)$  tal que  $f(x_\delta) \notin \tilde{B}$ . Tomando  $y_k = x_{1/k}$ , temos que  $y_k \rightarrow x$ , mas  $f(y_k) \notin \tilde{B} \ni f(x), \forall k \in \mathbb{N}$  o que implica que  $f(y_k) \not\rightarrow f(x)$ , ou seja  $f$  não é sequencialmente contínua.  $\square$

**Definição 1.4.28.** (Aplicação uniformemente contínua). Sejam  $(X, d)$ ,  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  é dita *uniformemente contínua* se dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para quaisquer  $x, y \in X$  temos

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

A uniformidade se refere ao fato de que  $\delta > 0$  é o mesmo para qualquer  $x \in X$ , ao contrário do conceito mais fraco de continuidade.

**Proposição 1.4.29.** *Seja  $(K, d)$  um espaço métrico compacto e  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  um espaço métrico qualquer. Toda aplicação contínua  $f : K \rightarrow \tilde{X}$  é uniformemente contínua.*

**Prova:** Seja  $\epsilon > 0$  dado. Como  $f$  é contínua, para cada  $x \in K$ , existe  $\delta_x > 0$  tal que

$$d(x, y) < \delta_x \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(y)) < \epsilon/2.$$

Escrevendo  $B_x = B(x, \delta_x/3)$ , temos que  $\{B_x, x \in K\}$  constitui uma cobertura de  $K$  por bolas abertas; como  $K$  é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita  $\{B_{x_1}, \dots, B_{x_q}\}$ ,  $\cup_{j=1}^q B_{x_j} \supset K$ . Tome  $\delta = \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_q}\}/3$ . Dados  $y, z$  tais que  $d(y, z) < \delta$ , supondo  $y \in B_{x_j}$ , temos:

$$d(z, x_j) \leq d(y, x_j) + d(y, z) < \delta_{x_j}/3 + \delta < \delta_{x_j},$$

o que significa que tanto  $y$  como  $z$  pertencem a  $B(x_j, \delta_{x_j})$ , daí

$$\tilde{d}(f(y), f(z)) \leq \tilde{d}(f(y), f(x_j)) + \tilde{d}(f(x_j), f(z)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

□

**Definição 1.4.30.** (Aplicação Lipschitz-contínua). Sejam  $(X, d)$ ,  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  é dita *Lipschitz-contínua* ou simplesmente *Lipschitz* se existe  $c \geq 0$  tal que

$$\tilde{d}(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

A constante  $c \geq 0$  da equação acima é dita uma *constante de Lipschitz* de  $f$ . O ínfimo das constantes de Lipschitz de  $f$  também é claramente uma constante de Lipschitz, e é denotado por  $\text{Lip}(f)$ .

**Observação 1.4.31.** Note que em vista da proposição 1.4.26, uma aplicação Lipschitz é sempre (uniformemente) contínua: dado  $\epsilon > 0$ , tomando  $\delta = \epsilon/c$ , temos que

$$f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon), \forall x \in X.$$

**Exemplo 1.4.32.** Seja  $X = \mathbb{R}^2$ , dotado da métrica

$$d_{\max}((x, y), (w, z)) = \max\{|x - w|, |y - z|\}, \forall (x, y), (w, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Então qualquer aplicação linear  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por um produto de uma matriz  $2 \times 2$  pelos vetores de  $\mathbb{R}^2$ :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

é Lipschitz-contínua. De fato:

$$\begin{aligned} d_{\max}(f(x, y), f(w, z)) &= d_{\max}((a \cdot x + b \cdot y, c \cdot x + d \cdot y), (a \cdot w + b \cdot z, c \cdot w + d \cdot z)) = \\ &= \max\{|a \cdot x + b \cdot y - (a \cdot w + b \cdot z)|, |c \cdot x + d \cdot y - (c \cdot w + d \cdot z)|\} = \\ &= \max\{|a \cdot (x - w) + b \cdot (y - z)|, |c \cdot (x - w) + d \cdot (y - z)|\} \leq \\ &= \max\{|a||x - w| + |b||y - z|, |c||x - w| + |d||y - z|\} \leq \\ &= (|a| + |b| + |c| + |d|) \cdot \max\{|x - w|, |y - z|\} = \\ &= (|a| + |b| + |c| + |d|) \cdot d_{\max}((x, y), (w, z)). \end{aligned}$$

Observamos que esse exemplo se generaliza para transformações lineares definidas em espaços vetoriais de dimensão finita qualquer.

**Proposição 1.4.33.** *Sejam  $(X, d)$ ,  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  e  $(\hat{X}, \hat{d})$  espaços métricos,  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  e  $g : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$  aplicações Lipschitz. Então a composta  $g \circ f : X \rightarrow \hat{X}$  é Lipschitz, com  $\text{Lip}(g \circ f) \leq \text{Lip}(g) \cdot \text{Lip}(f)$ .*

**Prova:** Sejam  $c, \tilde{c}$  constantes de Lipschitz respectivamente de  $f$  e  $g$ . Dados  $x, y \in X$ , temos então:

$$\hat{d}(g \circ f(x), g \circ f(y)) \leq \tilde{c} \tilde{d}(f(x), f(y)) \leq \tilde{c} \cdot c \cdot d(x, y).$$

Portanto,  $\tilde{c} \cdot c$  é uma constante de Lipschitz para  $g \circ f$ . Em particular,  $\text{Lip}(g \circ f) \leq \text{Lip}(g) \cdot \text{Lip}(f)$ . □

**Definição 1.4.34.** (Métricas equivalentes). Seja  $X$  um conjunto munido de duas métricas,  $d$  e  $\tilde{d}$ . Dizemos que  $d$  e  $\tilde{d}$  são *métricas equivalentes* se a identidade  $f : X \rightarrow X$ , dada por  $f(x) = x, \forall x \in X$  é uma aplicação contínua de  $(X, d)$  em  $(X, \tilde{d})$ , o mesmo valendo para a sua inversa.

**Definição 1.4.35.** (Métricas uniformemente equivalentes). Seja  $X$  um conjunto munido de duas métricas,  $d$  e  $\tilde{d}$ . Dizemos que  $d$  e  $\tilde{d}$  são *métricas uniformemente equivalentes* se a identidade  $f : X \rightarrow X$ , dada por  $f(x) = x, \forall x \in X$  é uma aplicação uniformemente contínua de  $(X, d)$  em  $(X, \tilde{d})$ , o mesmo valendo para a sua inversa.

**Definição 1.4.36.** (Métricas Lipschitz-equivalentes). Seja  $X$  um conjunto munido de duas métricas,  $d$  e  $\tilde{d}$ . Dizemos que  $d$  e  $\tilde{d}$  são *métricas Lipschitz-equivalentes* se a identidade  $f : X \rightarrow X$ , dada por  $f(x) = x, \forall x \in X$  é uma aplicação Lipschitz-contínua de  $(X, d)$  em  $(X, \tilde{d})$ , o mesmo valendo para a sua inversa.

Devido à observação 1.4.31, métricas Lipschitz-equivalentes são necessariamente (uniformemente) equivalentes. A recíproca, em geral, não é válida. Entretanto, métricas uniformemente equivalentes (das quais as Lipschitz equivalentes constituem um importante caso particular) preservam as propriedades de completude de espaços que definiremos logo a seguir:

**Definição 1.4.37.** (Sequência de Cauchy). Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Dizemos que  $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$  é uma *sequência de Cauchy* se dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

**Proposição 1.4.38.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Toda sequência convergente em  $X$  é de Cauchy.*

**Prova:** De fato, sejam  $(x_n)$  uma sequência convergente para  $x \in X$  e  $\epsilon > 0$  dado. Então existe  $n_0$  tal que  $d(x_n, x) < \epsilon/2, \forall n \geq n_0$ . Daí, para todo  $m \geq n_0$ , temos:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \epsilon,$$

isto é,  $(x_n)$  é de Cauchy. □

**Proposição 1.4.39.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Toda sequência de Cauchy em  $X$  é de limitada.*

**Prova:**

Tomemos  $\epsilon = 1$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  correspondente tal que

$$d(x_n, x_m) < 1, \forall m, n \geq n_0.$$

Tomando  $r := \max\{1, d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\} + 1$ , temos que  $x_n \in B(x_{n_0}, r)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e logo  $(x_n)$  é limitada. □

**Proposição 1.4.40.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Se uma sequência de Cauchy  $(x_n)$  em  $X$  possui uma subsequência convergente a algum ponto  $x \in X$ , então  $(x_n)$  é convergente a  $x$ .*

**Prova:**

Suponha que  $x_{n_j} \rightarrow x$  quando  $j \rightarrow +\infty$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe portanto  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall j \geq j_0$ ,  $d(x_{n_j}, x) < \epsilon/2$ .

Como  $(x_n)$  é Cauchy, existe  $n_0$  tal que  $\forall m, n \geq n_0$  vale

$$d(x_m, x_n) < \epsilon/2.$$

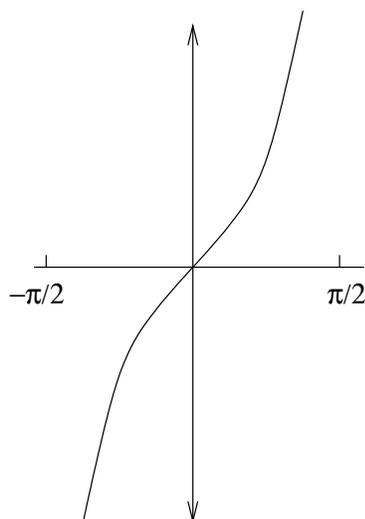
Tomando  $j_1 \geq j_0$  tal que  $n_{j_1} \geq n_0$ , obtemos:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{j_1}}) + d(x_{n_{j_1}}, x) < \epsilon, \forall n \geq n_0,$$

ou seja,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ . □

**Observação 1.4.41.** Note que mostrar que uma sequência é de Cauchy em um espaço métrico  $X$  é algo mais fácil do que mostrar que ela é convergente a algum ponto  $x \in X$ . Isso porque, para mostrarmos que uma sequência possui limite, ao menos em tese, devemos saber quem é esse limite, o qual, em geral, não nos é conhecido a priori. Já mostrar que uma sequência é de Cauchy diz respeito somente a comparar termos distintos da mesma, a qual é dada. As proposições acima nos dizem em particular que provar que uma sequência é de Cauchy pode ser um passo mais fácil para mostrar que uma determinada sequência converge.

**Definição 1.4.42.** (Espaço métrico completo). Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Dizemos que  $X$  é *espaço métrico completo* se toda sequência de Cauchy com valores em  $X$  é convergente para algum ponto de  $X$ .



$f(x) = \tan(x)$  leva homeomorficamente um intervalo aberto limitado na reta inteira.

Grosso modo, a definição acima transfere para o espaço  $X$  a responsabilidade (ou culpa) de uma sequência de Cauchy não ser convergente. Pois, se o espaço for completo, o trabalho de mostrar que uma sequência converge a um ponto do mesmo fica reduzido a mostrar que a sequência é de Cauchy. Como vimos na última observação, esta é uma tarefa mais fácil de realizar, pois não precisamos conhecer o limite da sequência. O próximo exemplo e as proposições seguintes, contudo, mostram que os conceitos de completude e de sequência de Cauchy são métricos, mas não topológicos. Isto quer dizer que homeomorfismos podem não preservar sequências de Cauchy e a completude de espaços.

**Exemplo 1.4.43.** (Um homeomorfismo que não preserva a completude.) Considere  $f : (-\pi/2, +\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) := \tan(x)$ . Sabemos que a função tangente é uma função contínua e estritamente crescente em  $(-\pi/2, \pi/2)$ , levando este intervalo na reta inteira. Em particular, se tomarmos  $w_n := \pi/2 - 1/n$ , temos que  $(w_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $(-\pi/2, +\pi/2)$  (de fato, ela converge a  $\pi/2$ ). Todavia,  $f(w_n) \rightarrow +\infty$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . Note que  $f^{-1}$  é contínua: dado  $y_n \rightarrow y \in \mathbb{R} = f((-\pi/2, \pi/2))$ , escrevendo  $x_n = f^{-1}(y_n)$ ,  $x = f^{-1}(y)$ , como  $x_n \in [-\pi/2, \pi/2]$ , temos dois casos a analisar:

1. Existe uma subsequência  $x_{n_j}$  convergindo a um dos extremos de  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Digamos, sem perda, que  $x_{n_j} \rightarrow \pi/2$  quando  $j \rightarrow +\infty$ . Nesse caso, teríamos  $y_{n_j} = f(x_{n_j}) \rightarrow +\infty$ ; absurdo.

2. Qualquer subsequência convergente de  $(x_n)$  tem como limite algum ponto em  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Assim, tomando  $(x_{n_j})$  convergente, digamos, a um certo  $\hat{x} \in (-\pi/2, \pi/2)$ , da continuidade de  $f$  concluímos que  $y_{n_j} = f(x_{n_j}) \rightarrow f(\hat{x}) = y$ . Como  $f$  é injetiva, segue-se que  $\hat{x} = x = f^{-1}(y)$ . Como qualquer subsequência de  $(x_n) = f^{-1}(y_n)$  converge a  $x = f^{-1}(y)$ , isso implica que  $f^{-1}$  é contínua.

Para o próximo exemplo, lembramos ao leitor o axioma do supremo da reta: todo subconjunto não vazio da reta, limitado superiormente possui a menor das cotas superiores, ou *supremo*. Segue-se daí também que todo subconjunto não vazio da reta, limitado inferiormente possui a maior de suas cotas inferiores, ou *ínfimo*.

**Exemplo 1.4.44.** (Um espaço métrico completo: a reta.) Usando do axioma do supremo, é fácil provar que a reta é um espaço métrico completo. De fato, seja  $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de Cauchy de números reais. Mostremos que  $(x_n)$  possui uma subsequência convergente, definindo indutivamente tal subsequência. Como  $(x_n)$  é de Cauchy, em particular, é limitada. Seja portanto um intervalo limitado  $I_0 := [a, b]$ ,  $a < b$  contendo  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Considere então  $I_{0,1} := [a, (a+b)/2]$  e  $I_{0,2} := [(a+b)/2, b]$ . Como  $I_0 = I_{0,1} \cup I_{0,2}$ , ao menos um destes intervalos contidos em  $I_0$  contém imagens  $x_n$  para infinitos índices  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $I_1 := [a_1, b_1]$  tal intervalo. Ou seja,  $I_1 \subset I_0$  é um intervalo com a metade do diâmetro de  $I_0$  e tal que  $x_n \in I_1, \forall n \in \mathbb{N}_1$ , com  $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$  infinito. Tomamos então  $x_{n_1} \in I_1$ . Suponha agora que para  $1 \leq j \leq m$  tenhamos construído:

- Uma cadeia finita de intervalos  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m$ , com  $I_j = [a_j, b_j]$ ,  $(b_j - a_j) = \text{diam}(I_j) = (b - a)/2^j$ , e tal que  $I_m$  contém termos  $x_n$  correspondentes a infinitos índices  $n \in \mathbb{N}$ .
- $x_{n_j} \in I_j, \forall j \in \{1, \dots, m\}$ , com  $n_j \geq j$ .

Dividindo  $I_m = [a_m, b_m]$  em dois intervalos com metade do diâmetro como fizemos com  $I_0$ , obtemos  $I_{m+1} \subset I_m$  com metade do diâmetro deste último e contendo termos  $x_n$  correspondentes a infinitos índices  $n \in \mathbb{N}$ . Tomamos então  $n_{m+1} > n_m$  tal que  $x_{n_{m+1}} \in I_{m+1}$ . Deste modo, definimos indutivamente uma subsequência  $(x_{n_j})$  de  $(x_n)$ . Mostremos que tal subsequência

converge. Primeiramente, note que a sequência  $(a_j)$  dos extremos inferiores dos intervalos  $I_j$  converge. De fato, ela é limitada e monótona, logo converge para  $\sup_{j \in \mathbb{N}} \{a_j\} := \alpha$ . Raciocínio análogo aplicado à sequência  $(b_j)$  dos extremos superiores dos intervalos  $I_j$  nos permite concluir que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} b_j = \inf_{j \in \mathbb{N}} \{b_j\} := \beta$ . Como

$$a_j \leq x_{n_j} \leq b_j \leq a_j + (b - a)/2^j,$$

concluimos que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} x_{n_j} = \alpha = \beta$ . Como  $(x_n)$  é de Cauchy, a proposição 1.4.40 nos dá que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lambda$ , e portanto, a reta é um espaço métrico completo.

**Proposição 1.4.45.** *Seja  $X$  um espaço métrico, e sejam  $d$  e  $\tilde{d}$  duas métricas uniformemente equivalentes em  $X$ . Então se uma sequência  $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$  é de Cauchy para  $(X, d)$ , ela também o é para  $(X, \tilde{d})$  (e vice-versa). Em particular,  $(X, d)$  é completo se e só se  $(X, \tilde{d})$  é completo.*

**Prova:** Seja  $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$  de Cauchy para  $(X, d)$ . Como  $d$  é uniformemente equivalente a  $\tilde{d}$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\tilde{d}(x, y) < \epsilon$  sempre que  $d(x, y) < \delta$ . Como  $(x_n)$  é de Cauchy para  $(X, d)$ , dado  $\epsilon > 0$ , tomando  $\delta > 0$  correspondente, temos que existe  $n_0$  tal que

$$d(x_m, x_n) < \delta, \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow \tilde{d}(x_m, x_n) < \epsilon, \forall m, n \geq n_0,$$

ou seja, a sequência  $(x_n)$  é de Cauchy para  $(X, \tilde{d})$ . Trocando os papéis de  $d$  e  $\tilde{d}$ , obtemos que uma sequência é de Cauchy para  $(X, d)$  se e só se o é para  $(X, \tilde{d})$ .

Agora, suponha em acréscimo que  $(X, d)$  seja espaço métrico completo. Como  $d$  e  $\tilde{d}$  são uniformemente equivalentes,  $(X, d)$  e  $(X, \tilde{d})$  possuem as mesmas sequências de Cauchy. Como  $(X, d)$  é completo, dada uma sequência  $(x_n)$  de Cauchy, esta é convergente, digamos, a um ponto  $x \in X$ . Daí, como  $d$  e  $\tilde{d}$  são equivalentes.  $d(x_n, x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \tilde{d}(x_n, x) \rightarrow 0$ , o que significa que  $(X, \tilde{d})$  também é completo. □

Temos ainda a seguinte proposição:

**Proposição 1.4.46.** *(Extensão de aplicações uniformemente contínuas). Seja  $S \subset X$  e  $g : S \rightarrow Y$  uniformemente contínua, onde  $X$  e  $Y$  são espaços métricos, sendo  $Y$  completo. Então  $g$  possui uma única extensão contínua  $\bar{g} : \bar{S} \rightarrow Y$ .*

**Prova:**

Para simplificar a notação, denotaremos por  $d$  tanto a métrica de  $X$  com a de  $Y$ . De fato, seja  $\bar{s} \in \bar{S}$ . Tome  $s_j \in \bar{s}$ . Como  $g$  é uniformemente contínua, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\forall x, w \in S$  com  $d(x, w) < \delta$  então  $d(g(x), g(w)) < \epsilon$ . Portanto, tomando  $j, k$  suficientemente grandes, temos  $|g(s_j) - g(s_k)| < \epsilon$ , o que implica que  $g(s_j)$  é de Cauchy. Como  $Y$  é completo, temos então  $\bar{g}(\bar{s}) = \lim_{j \rightarrow +\infty} g(s_j)$ . O fato de que a  $s_j$  tomada ser arbitrária, implica que esse limite é o mesmo para qualquer tal sequência de Cauchy (caso fosse diferente para duas quaisquer dessas sequências, poderíamos combinar as duas em uma terceira, que seria também de Cauchy- logo todas têm o mesmo limite). Para vermos que  $g$  é contínua, só resta tomar  $\bar{s}_j \in \bar{S}$ , com  $\bar{s}_j \rightarrow \bar{s}$ . Daí, dado  $\epsilon > 0$ , basta tomar uma sequência auxiliar  $z_j \in S$ , com  $d(\bar{s}_j, z_j) < 1/j$  e  $d(\bar{g}(\bar{s}_j), g(z_j)) < \epsilon/2$ , temos que  $z_j \rightarrow \bar{s}$  e portanto que existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(g(z_j), \bar{g}(\bar{s})) < \epsilon/2, \forall j \geq j_0$ . Portanto,

$$d(\bar{g}(\bar{s}_j), g(\bar{s})) \leq d(\bar{g}(\bar{s}_j), g(z_j)) + d(g(z_j), \bar{g}(\bar{s})) < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon, \forall j \geq j_0.$$

□

Uma importantíssima propriedade dos espaços métricos completos é dada pelo teorema de Baire:

**Teorema 1.4.47.** (*Baire*). *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Dada qualquer família enumerável  $\mathcal{F} := \{F_1, \dots, F_n, \dots\}$  de subconjuntos fechados de  $X$  com interior vazio sua união  $S := \cup_{n=1}^{\infty} F_n$  possui interior vazio.*

**Prova:** Suponha por absurdo que  $S$  não possua interior vazio. Então, existe uma bola aberta (não vazia)  $B(x, r) = B \subset S$ . Não há perda (trocando-se  $B$  por  $B(x, r/2)$ , se necessário) em supor que o fecho  $\bar{B} \subset S$  e assim o fazemos. Construiremos então uma sequência de Cauchy de  $\bar{B}$  cujo limite não poderá estar em nenhum dos fechados de  $\mathcal{F}$ . De fato, como  $F_1$  tem interior não vazio, existe algum ponto  $B \ni x_1 \notin F_1$ . Como  $F_1$  é fechado, seu complementar é aberto e portanto, existe uma bola  $B_1 \subset B \cap F_1^c$ . Sem perda, podemos supor que a bola  $B_1$  tem raio menor que  $r$  e que  $\bar{B}_1 \subset B \cap F_1^c$ . Agora, suponha que já temos construído bolas  $B_1 \supset \dots \supset B_n$  de centros  $x_1, \dots, x_n$  tal que  $\bar{B}_n \cap F_j = \emptyset, \forall 1 \leq j \leq n$  e os raio de  $B_n$  menor que  $r/n$ . Construamos  $B_{n+1} \subset B_n$  tal que  $\bar{B}_{n+1} \cap F_j = \emptyset, \forall 1 \leq j \leq n+1$ , com raio de  $B_{n+1}$  menor que  $r/(n+1)$ . De fato, como  $F_{n+1}$  é fechado de interior vazio, existe uma bola  $B_{n+1} \subset B_n \cap F_{n+1}^c$ . Sem perda, tomamos tal bola com raio menor que  $r/(n+1)$  e com fecho  $\bar{B}_{n+1} \subset B_n \cap F_{n+1}^c$ . Como

por hipótese de indução cada  $B_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  não intersecta  $F_j$ , segue-se que  $\overline{B_{n+1}} \cap F_j, \forall 1 \leq j \leq n+1$ . Mostremos que a sequência  $(x_n)$  dos centros das bolas  $B_n$  construídas é de Cauchy. De fato, dado  $\epsilon > 0$ , tomando  $n_0$  tal que  $2r/n_0 < \epsilon$ , temos que

$$x_n \in B_{n_0}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall m, n \geq n_0.$$

Como o espaço é completo, existe  $x_0 = \lim x_n$ . Ademais, como fixado  $j \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in B_j, \forall n \geq j$ , temos que

$$x_0 \in \overline{B_j}, \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow x_0 \notin F_j, \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow x_0 \notin S = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,$$

o que é absurdo, pois  $S \supset B \supset B_j$ . □

Uma subclasse relevante de aplicações Lipschitz é constituída pelas *contrações*:

**Definição 1.4.48.** (Contração). Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma aplicação  $F : X \rightarrow X$  é dita ser uma *contração* se existe  $0 \leq \lambda < 1$  tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

O próximo resultado corresponde à principal ferramenta para construir objetos em dimensão infinita, onde, ao contrário do que ocorre no  $\mathbb{R}^n$ , argumentos de compacidade são quase sempre inviáveis.

**Teorema 1.4.49.** (Ponto fixo para contrações). *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $F : X \rightarrow X$  uma contração. Então existe um único ponto fixo  $p$  por  $F$ , ou seja, existe um único ponto  $p \in X$  tal que  $F(p) = p$ . Ademais, tal ponto fixo  $p$  é um atrator de  $F$ , isto é, fixado qualquer  $x \in X$ ,  $F^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . ( $F^n(x)$  é definido indutivamente por  $F^n(x) := F(F^{n-1}(x))$ .)*

**Prova:**

Sejam  $x \in X$  e  $x_n = F^n(x), n \in \mathbb{N}$ . Provaremos que  $x_n$  é uma sequência de Cauchy. Para tal, primeiro mostremos por indução que existe  $0 \leq \lambda < 1$  tal que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n \cdot d(x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, como  $F$  é contração, temos que existe  $\lambda < 1$  tal que:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \lambda \cdot d(x_n, x_{n-1}),$$

o que já implica a fórmula de indução para  $n = 1$  (o caso  $n = 0$  é trivial. Supondo a fórmula válida para um certo  $n \in \mathbb{N}$ , para  $n + 1$ , da última desigualdade, temos:

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \lambda \cdot d(x_{n+1}, x_n) \underset{\text{hip. indução}}{\leq} \lambda \cdot \lambda^n d(x_1, x_0) = \lambda^{n+1} \cdot d(x_1, x_0),$$

o que prova a indução desejada.

Dados  $m \geq n$ , temos portanto:

$$d(x_m, x_n) \leq (\lambda^n + \dots + \lambda^m) \cdot d(x_1, x_0) \leq \left( \sum_{j=n}^{+\infty} \lambda^j \right) \cdot d(x_1, x_0) = \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(F(x_0), x_0),$$

o que prova que  $x_n$  é uma sequência de Cauchy, e como  $X$  é completo, tal sequência converge, digamos, para  $p \in X$ . Afirmamos que  $p$  é ponto fixo de  $F$ . Realmente,

$$F(p) = F\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = p.$$

Notamos que a segunda igualdade acima se dá porque toda contração é contínua, e a última desigualdade se dá porque em uma sequência convergente toda subsequência converge para o mesmo limite.

É fácil ver que  $p$  é o único ponto fixo de  $F$ . De fato, se  $p, q \in X$  são pontos fixos de  $F$ , temos:

$$\begin{aligned} d(p, q) &= d(F(p), F(q)) \leq \lambda \cdot d(p, q) \Rightarrow \\ (1 - \lambda) \cdot d(p, q) &\leq 0 \Rightarrow d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q, \end{aligned}$$

findando a prova do teorema. □

O próximo exemplo nos mostra que muitas vezes uma aplicação não é uma contração, mas algum iterado seu o é.

**Exemplo 1.4.50.** Considere o plano  $\mathbb{R}^2$  dotado com a distância  $d_{\max}((x, y), (w, z)) = \max\{|x - w|, |y - z|\}$  introduzida no exemplo 1.4.32. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1000 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como  $f$  é uma aplicação linear,  $f(0, 0) = (0, 0)$ . Temos que

$$d_{\max}(f(0, 1), f(0, 0)) = \max\{|1000|, |1/4|\} = 1000 > d_{\max}((0, 1), (0, 0)) = 1;$$

portanto,  $f$  não é contração. Contudo, é fácil provar por indução que dado  $n \in \mathbb{N}$  o iterado  $f^n$  é dado pela fórmula:

$$f^n(x, y) = \begin{pmatrix} (1/4)^n & n \cdot (1/4)^{n-1} \cdot 1000 \\ 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Claramente, todas as entradas da matriz na fórmula de  $f^n$  vão a zero. Pelas estimativas para a constante de Lipschitz feitas no próprio exemplo 1.4.32, obtemos que  $f^n$  é uma contração, se  $n$  for suficientemente grande.

As próximas observações implicam que a tese do teorema do ponto fixo continua valendo sem modificações se um iterado de  $f$ , e não necessariamente  $f$ , for uma contração.

**Observação 1.4.51.** Assinalamos que se  $p$  é o único ponto fixo de um iterado  $F^m$ ,  $m \geq 1$  de uma aplicação  $F : X \rightarrow X$  qualquer, então  $p$  é o único ponto fixo de  $F$ . De fato:

$$F^m(p) = p \Rightarrow F^m(F(p)) = F(F^m(p)) = F(p),$$

ou seja, se  $p$  e  $F(p)$  são pontos fixos de  $F^m(p)$ , logo  $F(p) = p$ . Isso é muito útil, pois nem sempre  $F$  é uma contração, mas muitas vezes um seu iterado é. Assim, a existência e unicidade preconizadas no teorema do ponto fixo para contrações continuam válidas para  $F$  mesmo que apenas um iterado positivo de  $F$  seja contração.

**Observação 1.4.52.** No caso em que  $F : X \rightarrow X$  não é contração, mas existe  $s \in \mathbb{N}$  tal que o iterado  $F^s$  é  $\lambda$ -contração, ainda é verdade que o ponto fixo  $p$  de  $F$  pode ser obtido como  $p = \lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x_0)$ , onde  $x_0$  é um ponto qualquer de  $X$ . De fato, aplicando a prova do teorema do Ponto Fixo a  $F^s$ , temos que para naturais  $m > k$  e  $x \in X$  vale

$$d((F^s)^k(x), (F^s)^m(x)) \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} d(x, F^s(x)).$$

Fazendo  $m \rightarrow \infty$ , obtemos que

$$d((F^s)^k(x), p) \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} d(x, F^s(x)).$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , aplicando o algoritmo de Euclides, temos que podemos escrevê-lo como  $n = s \cdot k + r$ , com  $0 \leq r < s$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} d(F^n(x_0), p) &= d(F^{s \cdot k + r}(x_0), p) = d((F^s)^k(F^r(x_0)), p) \leq \\ &\frac{\lambda^k}{1 - \lambda} d(F^r(x_0), F^s(F^r(x_0))) \leq \\ &\frac{\lambda^k}{1 - \lambda} \max_{j=0, \dots, s-1} \{d(F^j(x_0), F^s(F^j(x_0)))\} \leq \\ &\frac{\lambda^{n/2s}}{1 - \lambda} \max_{j=0, \dots, s-1} \{d(F^j(x_0), F^s(F^j(x_0)))\}, \end{aligned}$$

que claramente vai a zero quando  $n \rightarrow +\infty$ .

No próximo exemplo, vemos que uma aplicação pode mesmo não ser contínua e um iterado seu ser uma contração. Nesse caso, continua ainda valendo a tese do teorema do Ponto Fixo para Contrações.

**Exemplo 1.4.53.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

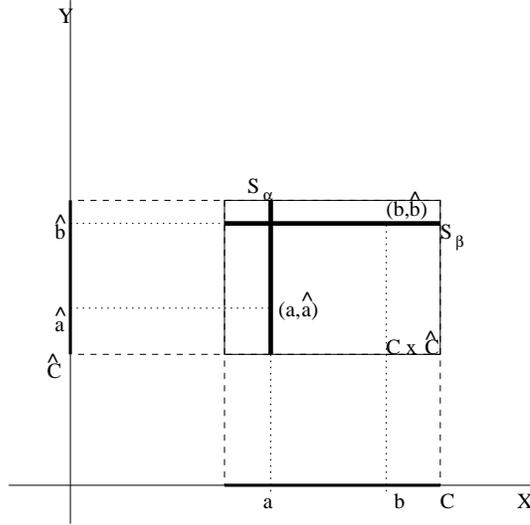
$$f(x) := \begin{cases} 1/2, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{caso } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Está claro que  $f$  é descontínua em todos os pontos, mas  $f \circ f \equiv 0$ , que é obviamente uma contração.

### 1.4.1 Espaços métricos produtos

Sejam  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  espaços métricos. Em  $Z := X \times Y$  podemos definir as seguintes métricas

1.  $d_{max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}, \forall x_1, x_2 \in X \text{ e } \forall y_1, y_2 \in Y.$
2.  $d_{soma}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2), \forall x_1, x_2 \in X \text{ e } \forall y_1, y_2 \in Y.$
3.  $d_{euclid}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2)}, \forall x_1, x_2 \in X \text{ e } \forall y_1, y_2 \in Y.$



Esquema em  $\mathbb{R}^2$  do produto cartesiano de dois conexos (da reta, na figura).  
Em destaque, negritados,  $C$ ,  $\hat{C}$ , e  $S_\alpha \cup S_\beta$ .

Deixamos ao leitor a tarefa de verificar as propriedades de métrica das aplicações acima e também o fato de que as três são Lipschitz-ivalentes.

**Definição 1.4.54.** (Espaço métrico produto). Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  espaços métricos. Denominamos o *espaço métrico produto* entre  $X$  e  $Y$  ao espaço métrico  $(Z, d)$ , onde  $Z = X \times Y$  e  $d$  é qualquer uma das métricas  $d_{max}$ ,  $d_{soma}$  ou  $d_{euclid}$  definidas mais acima.

**Proposição 1.4.55.** Sejam  $C \subset X$  e  $\hat{C} \subset Y$  subconjuntos conexos dos espaços métricos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$ . Então  $C \times \hat{C}$  é conexo no espaço produto  $Z = X \times Y$ .

**Prova:** Sejam  $\alpha = (a, \hat{a}) \in C \times \hat{C}$  e  $\beta = (b, \hat{b}) \in C \times \hat{C}$ . Criaremos um conexo contido em  $C \times \hat{C}$  e contendo  $\alpha$  e  $\beta$ . Ele será união de:

$$S_\alpha := C \times \{\hat{a}\} \text{ e } S_\beta := b \times \hat{C}.$$

Notamos que  $S_\alpha$  é homeomorfo a  $C$ , pois a aplicação  $h_\alpha : C \rightarrow S_\alpha$  dada por  $x \mapsto (x, \hat{a})$  de fato é uma isometria sobrejetiva (em particular, é Lipschitz com inversa Lipschitz). Por razões inteiramente análogas,  $S_\beta$  é homeomorfo a  $\hat{C}$ . Em particular,  $S_\alpha$  e  $S_\beta$  são conexas. Ademais,  $S_\alpha$  e  $S_\beta$  possuem um

ponto em comum:  $(b, \hat{a}) \in S_\alpha \cap S_\beta$ . Logo,  $S_\alpha \cup S_\beta$  é conexo contendo  $\alpha$  e  $\beta$ . Em particular, por definição de componente conexa,  $\alpha \in S_\alpha \cup S_\beta \subset (C \times \hat{C})_\alpha$ , onde  $(C \times \hat{C})_\alpha$  é a componente conexa de  $C \times \hat{C}$  contendo  $\alpha$ . Mas  $\beta \in S_\alpha \cup S_\beta \subset (C \times \hat{C})_\beta$ , o que implica que  $(C \times \hat{C})_\alpha = (C \times \hat{C})_\beta$ , pois duas componentes conexas ou são disjuntas ou são a mesma.  $\square$

**Proposição 1.4.56.** *Sejam  $K \subset X$ ,  $\hat{K} \subset Y$  subconjuntos dos espaços métricos  $X$  e  $Y$ . Então  $K \times \hat{K}$  é compacto no espaço produto  $X \times Y$  se e só se  $K$  e  $\hat{K}$  são compactos.*

**Prova:** ( $\Rightarrow$ ) Se  $K \times \hat{K}$  é compacto observamos que as projeções naturais  $\pi : K \times \hat{K} \rightarrow K$ ,  $\hat{\pi} : K \times \hat{K} \rightarrow \hat{K}$  dadas respectivamente por  $\pi(x, y) = x$  e  $\hat{\pi}(x, y) = y$  são contínuas (de fato são Lipschitz) e portanto suas correspondentes imagens,  $K$  e  $\hat{K}$ , são compactas.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $(z_j) : \mathbb{N} \rightarrow K \times \hat{K}$  uma sequência qualquer. Mostraremos que  $(z_n)$  admite alguma subsequência convergente em  $K \times \hat{K}$ , o que implicará que  $K \times \hat{K}$  é espaço métrico sequencialmente compacto, e por conseguinte, compacto.

Como  $K$  é métrico compacto, é sequencialmente compacto. Em particular, escrevendo  $z_j = (x_j, y_j)$ , temos que  $(x_j)$  admite uma subsequência convergente  $(x_{j_k}), j_k \in \mathbb{N}_x \subset \mathbb{N}$ , com  $x_{j_k} \rightarrow x \in K$ . Pelas mesmas razões  $\hat{K}$  é sequencialmente compacto e  $(\hat{y}_k) := (y_{j_k}), j_k \in \mathbb{N}_x$  admite uma subsequência convergente  $\hat{y}_{k_l} \rightarrow y \in \hat{K}$ . Afirmamos que a subsequência  $(z_{k_l})$  de  $(z_j)$  dada por  $z_{k_l} = (x_{j_{k_l}}, y_{j_{k_l}})$  converge para  $(x, y)$ . Para ver isso, tomemos sem perda a métrica da soma no espaço produto  $X \times Y$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe  $l_0$  tal que  $d_X(x_{j_{k_l}}, x) < \epsilon/2$  e  $d_Y(y_{j_{k_l}}, y) < \epsilon/2, \forall l \geq l_0$ . Portanto

$$d((x_{j_{k_l}}, y_{j_{k_l}}), (x, y)) = d_X(x_{j_{k_l}}, x) + d_Y(y_{j_{k_l}}, y) < \epsilon, \forall l \geq l_0.$$

$\square$

## 1.5 Exercícios

1. Seja  $Z$  um espaço métrico. Se  $Z$  é enumerável e possui mais de um elemento, então  $Z$  não é conexo.
2. Seja  $X$  um espaço topológico conexo e  $Y$  um espaço métrico. Se uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  possui imagem enumerável então  $f$  é constante.

3. Seja  $X$  um espaço métrico. Mostre que  $C \subset X$  é desconexo se e só se existem abertos  $A, B \subset X$  tais que  $A \cup B \supset C$ ,  $A \cap B = \emptyset$  e tanto  $A \cap C$  como  $B \cap C$  são diferentes de vazio. Ou seja, mostre que em espaços métricos, se temos uma cisão de  $C$  por abertos de  $C$  disjuntos podemos sempre obter uma cisão de  $C$  por abertos de  $X$  disjuntos em  $X$ .
4. Seja  $X$  um espaço métrico. Mostre diretamente (sem usar o teorema 1.4.13 da página 26, ou as implicações nele provadas, mesmo que usando das idéias nele presentes) que  $X$  possui a propriedade de Lindelöf se, e só se,  $X$  é separável.
5. Seja  $X = \mathbb{N}$  o conjunto dos naturais dotado da métrica usual, definida por  $d(x, y) = |x - y|$ . Mostre que toda cobertura de  $X$  por abertos admite um número de Lebesgue, mas que  $X$  não é compacto. Tal fato demonstra que, em geral, a recíproca do teorema 1.4.25 da página 30 não é válida.
6. Seja  $X$  um espaço métrico.  $X$  é dito *totalmente limitado* se dado  $\epsilon > 0$ , existe uma cobertura finita de  $X$  por bolas de raio  $\epsilon$ . Mostre que  $X$  é compacto se e só se  $X$  é completo e totalmente limitado.
7. Mostre que um espaço métrico é compacto se e só se para toda função  $f : X \rightarrow (0, +\infty)$ , tem-se  $\inf\{f(x), x \in X\} > 0$ .
8. Seja  $K$  um espaço métrico compacto e sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos, e seja  $c \in Y$ . Suponha que  $f : X \times K \rightarrow Y$  é uma função contínua, e que para cada  $x \in X$ , exista um único  $w = w(x) \in K$  tal que  $f(x, w(x)) = c$ . Mostre que  $w$  é contínua.

## 1.6 Espaços vetoriais normados

**Definição 1.6.1.** (Norma). Seja  $E$  um espaço vetorial. Uma *norma* em  $E$  é uma função  $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty)$  tal que:

- 1)  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ;
- 2)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ ;  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in E$ .
- 3)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ ;  $\forall v, w \in E$  (desigualdade triangular).

O par  $(E, \|\cdot\|)$  é dito *espaço normado*.

A uma norma  $\|\cdot\|$  em um espaço vetorial  $E$  sempre está associada uma métrica  $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty)$  dada por

$$d(v, w) := \|v - w\|, \forall v, w \in E.$$

Deixamos ao leitor a tarefa de verificar as propriedades de métrica da aplicação acima.

**Definição 1.6.2.** (Espaço de Banach). Um espaço vetorial normado cuja métrica associada é completa é chamado de *Espaço normado completo*, ou *Espaço de Banach*.

Observamos ainda que dotando  $E$  da métrica acima, a própria norma e as operações de produto por escalar (definido do espaço métrico produto  $\mathbb{R} \times E$  para  $E$ ) e de soma de vetores (definida do espaço métrico produto  $E \times E$  para  $E$ ) são automaticamente contínuas. Este é o teor da próxima proposição:

**Proposição 1.6.3.** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado. A aplicação norma  $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty)$  é lipschitziana (e portanto contínua). Também são contínuas as aplicações  $p : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$  e  $s : E \times E \rightarrow E$  dadas por*

$$p(c, v) := c \cdot v, \forall c \in \mathbb{R}, \forall v \in E \text{ (produto por escalar)}$$

e

$$s(v, w) = v + w, \forall v, w \in E \text{ (soma vetorial)}.$$

**Prova:** Temos que

$$\|v\| = \|v - w + w\| \leq \|v - w\| + \|w\| \Rightarrow \|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|.$$

Trocando os papéis de  $v$  e  $w$ , concluímos que

$$\| \|v\| - \|w\| \| \leq \|v - w\|,$$

ou seja, a norma é lipschitziana com constante de Lipschitz igual a 1.

Agora, dados  $(c, v), (\hat{c}, \hat{v}) \in \mathbb{R} \times E$ , temos:

$$\begin{aligned} |p(c, v) - p(\hat{c}, \hat{v})| &\leq \|c \cdot v - \hat{c} \cdot \hat{v}\| \leq \|c \cdot v - \hat{c} \cdot v\| + \|\hat{c} \cdot v - \hat{c} \cdot \hat{v}\| = \\ &|c - \hat{c}| \|v\| + |\hat{c}| \|v - \hat{v}\|. \end{aligned}$$

Dado  $\epsilon > 0$ , se  $(\hat{c}, v) = (0, 0)$ , a expressão acima é menor que epsilon. Supondo que  $(\hat{c}, v) \neq (0, 0)$ , tomando

$$\|(c, v) - (\hat{c}, \hat{v})\| = \max\{|c - \hat{c}|, \|v - \hat{v}\|\} < \frac{\epsilon}{\max\{\|v\|, |\hat{c}|\}},$$

tal implica que

$$|p(c, v) - p(\hat{c}, \hat{v})| < \max\{\|v\|, |\hat{c}|\} \cdot \max\{|c - \hat{c}|, \|v - \hat{v}\|\} < \epsilon.$$

Finalmente, dados  $(v, w), (\hat{v}, \hat{w}) \in E \times E$ , temos

$$\begin{aligned} \|s(v, w) - s(\hat{v}, \hat{w})\| &= \|v + w - (\hat{v} + \hat{w})\| \leq \|v - \hat{v}\| + \|w - \hat{w}\| \\ &\leq 2 \cdot \max\{\|v - \hat{v}\|, \|w - \hat{w}\|\} = 2 \cdot \|(v, w) - (\hat{v}, \hat{w})\|, \end{aligned}$$

ou seja, a soma vetorial é lipschitziana e logo contínua.  $\square$

**Exemplo 1.6.4.** (A reta  $\mathbb{R}$ .) Considere a reta  $\mathbb{R}$ . A própria função módulo  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ , dada por  $|x| := \sqrt{x^2}$  é claramente uma norma em  $\mathbb{R}$ . Ademais, é fato bem conhecido que, devido ao teorema de Bolzano-Weierstrass, a reta é completa. Para provar isso, basta seguir o seguinte esquema:

1. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, toda sequência limitada de reais possui uma subsequência convergente a um número real.
2. É fato geral (de qualquer espaço métrico) que toda sequência de Cauchy é limitada.
3. Também é fato geral que se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente, então a própria sequência converge.
4. Dada uma sequência de Cauchy  $(x_n)$  de reais arbitrária, os itens 1 e 2 acima garantem que ela admite subsequência convergente a um certo elemento  $y \in \mathbb{R}$ , e conseqüentemente, o item 3 nos dá que  $x_n \rightarrow y$ .

**Exemplo 1.6.5.** Seja  $J_n := \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$  e considere o espaço vetorial de funções  $E := \{v; v : J_n \rightarrow \mathbb{R}\}$ , dotado da aplicação  $\|\cdot\|_{\max} : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|v\|_{\max} := \max\{v(1), \dots, v(n)\} = \max_{j \in J_n}\{|v_j|\},$$

onde  $v_j := v(j), j = \{1, \dots, n\}$ . É bem fácil ver que  $\|\cdot\|_{\max}$  é uma norma em  $E$ . Note que  $E$  é (isomorfo a) o famoso espaço  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$ , dotado da norma do máximo.

**Exemplo 1.6.6.** Considere agora o espaço vetorial de funções

$$l^\infty := \{v; v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, v \text{ é limitada.}\},$$

dotado da aplicação  $\|\cdot\|_{\sup} : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|v\|_{\sup} := \sup_{j \in \mathbb{N}} \{|v_j|\},$$

onde  $v_j := v(j), j \in \mathbb{N}$ . Mais adiante veremos que  $\|\cdot\|_{\max}$  é uma norma em  $E$ .  $l^\infty$  é o espaço das sequências limitadas, e a norma em questão é conhecida como a norma do sup. Note que o subespaço das sequências  $\{(v_1, \dots, v_n, 0, \dots)\} \subset l^\infty$  é isomorfo ao espaço  $\mathbb{R}^n$  dotado da norma do máximo, introduzido no exemplo anterior.

Os últimos exemplos encontram a seguinte generalização:

**Exemplo 1.6.7.** Seja  $X$  um conjunto qualquer, e  $E$  um espaço de Banach, dotado com a uma dada norma  $\|\cdot\|$  (Como sabemos, a reta  $\mathbb{R}$  é um exemplo muito particular de espaço de Banach). Considere agora o espaço vetorial de aplicações

$$F^\infty(X; E) := \{v; v : X \rightarrow E, v \text{ é limitada.}\}.$$

Daí, a aplicação  $\|\cdot\|_\infty : F^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|v\|_\infty := \sup_{x \in X} \{\|v(x)\|\}$$

é uma norma. Tal fato será mostrado na próxima proposição.

**Proposição 1.6.8.** *Seja  $X$  um conjunto qualquer, e  $E$  um espaço de Banach. Então o espaço  $F^\infty(X; E) := \{v; v : X \rightarrow E, v \text{ é limitada.}\}$ , dotado com a norma  $\|\cdot\|_\infty$  definida no último exemplo é, ele mesmo, um espaço vetorial normado completo, ou espaço de Banach.*

**Prova:**

É claro que a aplicação  $f \equiv 0$  é limitada e logo pertence a  $F^\infty(X; E)$  e que combinações lineares arbitrárias de aplicações limitadas são aplicações limitadas. Portanto,  $F^\infty(X; E)$  é um espaço vetorial.

$\|\cdot\|_\infty$  é norma:

i) É imediato que  $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ .

ii) Dado um escalar  $\lambda$ , temos que  $\|\lambda \cdot f\|_\infty = \sup\{\|\lambda \cdot f(x)\|, x \in X\} = \|\lambda\| \cdot \sup\{|f(x)|, x \in X\} = \|\lambda\| \cdot \|f\|_\infty$ .

iii) Note que para  $x \in X$ , vale que

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \Rightarrow$$

$$\sup\{|f(x) + g(x)|, x \in X\} = \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Verifiquemos agora que  $\|\cdot\|_\infty$  é completa:

Seja  $(f_n)$  uma sequência de Cauchy em  $F^\infty(X; E)$ . Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon; \forall n, m \geq n_0$ . Daí, pra todos  $m, n \geq n_0$  temos que para cada  $x \in X$  vale  $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon$ . Usando que o espaço  $E$  é completo, o acima nos diz que  $(f_n(x))$  é de Cauchy e portanto converge para um vetor  $f(x) \in E$ . Concluimos que  $f_n$  converge pontualmente (em cada ponto  $x \in X$ ) para uma aplicação  $f : X \setminus \tilde{X} \rightarrow E$ , a qual é limitada. De fato, se  $M > 0$  é tal que  $\|f_{n_0}(x)\| < M, \forall x \in X$ , temos que para cada  $x \in X$  vale:

$$\|f(x) - f_{n_0}(x)\| \leq \epsilon \Rightarrow \|f(x)\| \leq \|f_{n_0}(x)\| + \|f(x) - f_{n_0}(x)\| < M + \epsilon, \forall x \in X,$$

ou seja,  $M + \epsilon$  é uma cota para  $\|f(x)\|$ , e então  $f$  pertence a  $F^\infty(X; E)$ . Só resta ver que  $f_n$  converge a  $f$  na norma  $\|\cdot\|_\infty$ . De fato, dado  $\epsilon > 0$ , vimos que existe  $n_0$  tal que  $\forall n, m \geq n_0, \forall x \in X$  vale

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \epsilon \underset{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} \|f(x) - f_m(x)\| \leq \epsilon,$$

o que implica que  $\|f - f_m\|_\infty \leq \epsilon, \forall m \geq n_0$  e por conseguinte, que  $f_m \rightarrow f$  na norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

□

Quando  $X$  é um espaço topológico, o espaço  $F(X, E)$  admite um importante subespaço de Banach, o espaço

$$C_b^0(X; E) := \{f : X \rightarrow E, f \text{ é contínua e limitada.}\}.$$

Este é o teor da próxima proposição.

**Proposição 1.6.9.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $E$  um espaço de Banach. Então o conjunto das aplicações contínuas e limitadas  $C_b^0(X; E)$ , dotado com a norma  $\|\cdot\|_\infty$ , é um subespaço fechado de  $F(X; E)$ . Como  $F(X; E)$  é um espaço de Banach, em particular  $C_b^0(X; E)$  também o é.*

**Prova:**

□

Interessante notar que as outras normas do  $\mathbb{R}^n$  nos inspiram a definir outros espaços de dimensão infinita que as generalizam:

**Exemplo 1.6.10.** Seja  $J_n := \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$  e considere o espaço vetorial de funções  $E := \{v; v : J_n \rightarrow \mathbb{R}\}$ , dotado da aplicação  $\|\cdot\|_{soma} : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|v\|_{soma} := |v(1)| + \dots + |v(n)| = \sum_{j \in J_n} |v_j|,$$

onde  $v_j := v(j), j = \{1, \dots, n\}$ . É bem fácil ver que  $\|\cdot\|_{soma}$  é uma norma em  $E$ . Note que  $E$  é (isomorfo a) o famoso espaço  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$ , dotado da norma da soma.

**Exemplo 1.6.11.** Considere agora o espaço vetorial de seqüências (funções de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{R}$ ) dado por

$$l^1 := \{v; v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{\infty} |v_j| < \infty\},$$

dotado da aplicação  $\|\cdot\|_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|v\|_1 := \sum_{j \in \mathbb{N}} |v_j|,$$

onde  $v_j := v(j), j \in \mathbb{N}$ . Mais adiante veremos que  $\|\cdot\|_{\max}$  é uma norma em  $E$ .  $l^\infty$  é o espaço das seqüências limitadas, e a norma em questão é conhecida como a norma do sup. Note que o subespaço das seqüências  $\{(v_1, \dots, v_n, 0, \dots)\} \subset l^\infty$  é isomorfo ao espaço  $\mathbb{R}^n$  dotado da norma da soma, introduzido no exemplo anterior.

**Definição 1.6.12.** (Aplicação linear limitada). Sejam  $E, \tilde{E}$  espaços vetoriais normados e seja  $L : E \rightarrow \tilde{E}$  uma aplicação linear.  $L$  é *limitada* se  $\exists c > 0$  tal que  $\|L(x)\| \leq c \cdot \|x\|, \forall x \in E$ . Em outras palavras, uma aplicação linear limitada é uma aplicação linear que é Lipschitz.

**Proposição 1.6.13.** Sejam  $E, \tilde{E}$  espaços vetoriais normados. As seguintes assertivas são equivalentes no que tange uma aplicação linear  $L : E \rightarrow \tilde{E}$ :

1.  $L$  é contínua;
2.  $L$  é contínua em algum ponto  $x_0 \in E$ ;
3.  $L$  é contínua em  $0 \in E$ ;
4. Existe um número real  $c > 0$  tal que  $\|L(x)\| \leq c, \forall x \in E$  com  $\|x\| = 1$ .
5.  $L$  é aplicação Lipschitz, ou seja, existe um número real  $c > 0$  tal que  $\|L(x) - L(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|, \forall x, y \in E$ .

**Prova:**

As implicações  $5 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$  são claras. Resta-nos mostrar portanto  $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$ .

( $2 \Rightarrow 3$ ) Seja  $\epsilon > 0$  dado. Como  $L$  é contínua em  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|L(x) - L(x_0)\| < \epsilon.$$

Dado qualquer  $y \in E$  tal que  $\|y - 0\| = \|y\| < \delta$ , podemos escrever:

$$\|y\| < \delta \Leftrightarrow \|(y + x_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|L(y + x_0) - L(x_0)\| < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\|L(y) - L(x_0 - x_0)\| = \|L(y) - L(0)\| < \epsilon,$$

ou seja,  $L$  é contínua em  $0 \in E$ .

( $3 \Rightarrow 4$ ) Provemos essa sentença por absurdo. Suponha que para cada  $j \in \mathbb{N}$ , exista  $x_j \in E$  com  $\|x_j\| = 1$  tal que

$$\|L(x_j)\| \geq j, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Considere a sequência  $y_j = (1/j) \cdot x_j$ . Como

$$\|y_j\| = \frac{1}{j} \cdot \|x_j\| = \frac{1}{j} \rightarrow 0, \text{ quando } j \rightarrow \infty,$$

da continuidade de  $L$  em  $0 \in E$  temos que  $L(y_j) \rightarrow L(0) = 0 \in \tilde{E}$ . Contudo, da linearidade de  $L$  e das propriedades de norma segue-se

$$\|L(y_j)\| = \frac{1}{j} \cdot \|L(x_j)\| \geq \frac{1}{j} \cdot j = 1,$$

o que implica que  $L(y_j) \not\rightarrow 0$ , absurdo.

(4  $\Rightarrow$  5) Sejam  $x, y \in E$ . Se  $x = y$ ,  $L(x) - L(y) = 0$  e a desigualdade é óbvia, para qualquer  $c > 0$ . Assim, vamos supor  $x \neq y$ . Daí,

$$\|L(x) - L(y)\| = \frac{\|L(x) - L(y)\|}{\|x - y\|} \cdot \|x - y\| = \left\| L\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}\right) \right\| \cdot \|x - y\|.$$

Como

$$\left\| \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x - y\|} = 1,$$

a assertiva 4 implica que

$$\|L(x) - L(y)\| = \left\| L\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}\right) \right\| \cdot \|x - y\| \leq c \cdot \|x - y\|,$$

ou seja,  $L$  é Lipschitz. □

**Proposição 1.6.14.** (*Espaço  $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$ /Norma do operador*). Sejam  $E$  e  $\tilde{E}$  dois espaços vetoriais normados. Então

$$\mathcal{L}(E, \tilde{E}) := \{T : E \rightarrow \tilde{E}; T \text{ é operador linear limitado} \}$$

é um espaço vetorial. Ademais a aplicação  $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, \tilde{E}) \rightarrow [0, +\infty)$  dada por

$$\|T\| := \sup\{\|T \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\}$$

define uma norma (chamada de norma do operador) em  $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$ .

**Prova:** Seja  $b \in \mathbb{R}$  um escalar e  $T_1 : E \rightarrow \tilde{E}$ ,  $T_2 : E \rightarrow \tilde{E}$  dois operadores lineares. Então claramente  $T := T_1 + b \cdot T_2$  é um operador linear de  $E$  em  $\tilde{E}$ . Além disso  $T$  é limitado, pois se  $c_1$  e  $c_2$  são as constantes de Lipschitz (vide proposição 1.6.13 acima) respectivamente de  $T_1$  e  $T_2$ , temos

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\|_{\tilde{E}} &\leq \|T_1(x) - T_1(y)\|_{\tilde{E}} + |b| \|T_2(x) - T_2(y)\|_{\tilde{E}} \leq \\ &c_1 \|x - y\|_E + |b| c_2 \|x - y\|_E, \forall x, y \in E, \end{aligned}$$

o que implica que  $T$  é Lipschitz com constante  $c := c_1 + |b|c_2$ , e portanto limitado. Tal implica que  $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$  é um espaço vetorial.

Só resta vermos que a aplicação  $\|\cdot\|$  do enunciado é mesmo uma norma em  $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$ . A proposição 1.6.13 nos garante que tal aplicação está bem definida em  $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$ , com imagem em  $[0, +\infty)$ . Se  $T \equiv 0$ , claramente  $\|T\| = 0$ . Por

outro lado,  $\|T\| = 0$  implica que  $T \cdot x = 0, \forall x \in E$  com  $\|x\|_E = 1$ . Se  $v \in E$ , então

$$\|T \cdot v\|_{\tilde{E}} = \|T \cdot \frac{v}{\|v\|_E}\|_{\tilde{E}} \cdot \|v\|_E \leq \|T\| \cdot \|v\|_E = 0,$$

donde concluimos que  $T \equiv 0$ .

Dado um escalar  $b \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\begin{aligned} \|bT\| &= \sup\{\|bT \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\} = \\ &= \sup\{|b|\|T \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\} = |b|\|T\|. \end{aligned}$$

Finalmente, dados  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, \tilde{E})$ , a desigualdade triangular vem de

$$\|T_1 + T_2\| = \sup\{\|(T_1 + T_2) \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\} \leq$$

(pela desigualdade triangular em  $\tilde{E}$ )

$$\sup\{\|T_1 \cdot x\|_{\tilde{E}} + \|T_2 \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\} \leq$$

$$\sup\{\|T_1 \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\} + \sup\{\|T_2 \cdot y\|_{\tilde{E}} : y \in E, \|y\|_E = 1\} = \|T_1\| + \|T_2\|.$$

□

**Proposição 1.6.15.** *Sejam  $E$  e  $\tilde{E}$  dois espaços vetoriais normados, sendo  $\tilde{E}$  de Banach. Então o espaço vetorial  $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$ , dotado da norma do operador, é um espaço de Banach.*

**Prova:** Seja  $T_n \in \mathcal{L}(E, \tilde{E})$  uma sequência de Cauchy. Em particular, como  $\|(T_n - T_m)(v)\|_{\tilde{E}} \leq \|T_n - T_m\| \|v\|_E$ , concluimos que para cada  $v \in E$ ,  $(T_n(v))$  é uma sequência de Cauchy em  $\tilde{E}$ .

Portanto, definamos  $T : E \rightarrow \tilde{E}$  por

$$T(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(v), \forall v \in E.$$

Claramente  $T$  é linear:

$$T(v + w) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(c \cdot v + w) = \lim_{n \rightarrow +\infty} c \cdot T_n(v) + T_n(w) =$$

$$c \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(v) + \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(w) = c \cdot T(v) + T(w), \forall c \in \mathbb{R}, \forall v, w \in E.$$

Daí, é fácil ver que  $T \in \mathcal{L}(E, \tilde{E})$ . De fato, seja  $\epsilon > 0$ , e tome  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|T_n - T_m\| < \epsilon, \forall n, m \geq n_0$ . Daí, dado  $v \in E$  com  $\|v\|_E = 1$ , temos:

$$\|T_n(v)\|_{\tilde{E}} \leq \|T_n\| \leq \|T_{n_0}\| + \|T_n - T_{n_0}\| < \|T_{n_0}\| + \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

A continuidade da norma e a desigualdade acima implicam que  $\|T(v)\|_{\tilde{E}} \leq \|T_{n_0}\| + \epsilon$ ,  $\forall v \in E$ ,  $\|v\|_E = 1$ , donde

$$\sup_{\|v\|=1} \{\|T(v)\|_{\tilde{E}}\} \leq \|T_{n_0}\| + \epsilon \Rightarrow T \text{ é limitado.}$$

Só falta vermos que  $T_n \rightarrow T$  na norma do operador. Dado  $v \in E$  tal que  $\|v\| = 1$ , vimos acima que  $\forall n, m \geq n_0$ , vale:

$$\|T_n(v) - T_m(v)\|_{\tilde{E}} \leq \|T_n - T_m\| < \epsilon.$$

Novamente, fazendo  $m \rightarrow +\infty$ , fixando  $n \geq n_0$ , a continuidade da norma e a última inequação implicam que  $\forall v \in E$ , com  $\|v\|_E = 1$  vale que  $\|T_n(v) - T(v)\|_{\tilde{E}} \leq \epsilon$ .

Donde concluímos que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\sup_{\|v\|_E} \{\|T_n(v) - T(v)\|_{\tilde{E}}\} = \|T_n - T\| \leq \epsilon.$$

□

**Definição 1.6.16.** (Normas equivalentes). Seja  $E$  um espaço vetorial e  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  duas normas definidas em  $E$ . Dizemos que  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  são *equivalentes* se existem constantes  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$  tais que

$$\frac{1}{c_1} \cdot \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c_2 \|v\|_2, \forall v \in E.$$

**Observação 1.6.17.** Duas normas  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  são normas equivalentes em um espaço vetorial  $E$  se e só se suas respectivas métricas  $d_1$  e  $d_2$  são Lipschitz-equivalentes. De fato, sejam  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ . Daí,

$$\|v\|_1 \leq c_2 \|v\|_2 \Leftrightarrow d_1(v, 0) \leq c_2 d_2(v, 0), \forall v \in E \Leftrightarrow$$

$$d_1(x - y, 0) \leq c_2 d_2(x - y, 0), \forall x, y \in E \Leftrightarrow d_1(x, y) \leq c_2 d_2(x, y), \forall x, y \in E.$$

a outra desigualdade, com  $c_1$ , provando-se com a mesma facilidade.

**Corolário 1.6.18.** *Sejam  $(E, \|\cdot\|_1)$ ,  $(E, \|\cdot\|_2)$  espaços vetoriais normados. Então as respectivas métricas de  $E$  dadas por*

$$d_1(x, y) = \|x - y\|_1; d_2(x, y) = \|x - y\|_2, \forall x, y \in E$$

são equivalentes se, e só se são Lipschitz-equivalentes. Em particular, tal ocorre se e só se existem constantes  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$  tais que

$$\frac{1}{c_1} \cdot \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c_2 \|v\|_2, \forall v \in E,$$

ou seja, se e só se as normas  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  são equivalentes.

**Prova:** A recíproca é óbvia, assim provemos que se as métricas acima são equivalentes, então são Lipschitz equivalentes.

Se as métricas  $d_1$  e  $d_2$  são equivalentes, então a identidade  $I : (E, d_1) \rightarrow (E, d_2)$  é um homeomorfismo. Pela última proposição, segue-se que tanto  $I$  como  $I^{-1} : (E, d_2) \rightarrow (E, d_1)$  são lipschitzianas, logo existem constantes  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$  tais que

$$d_2(x, y) = d_2(I(x), I(y)) \leq c_1 d_1(x, y) \text{ e}$$

$$d_1(x, y) = d_1(I^{-1}(x), I^{-1}(y)) \leq c_2 d_2(x, y), \forall x, y \in E;$$

o que significa que  $d_1$  e  $d_2$  são Lipschitz-equivalentes. Pela observação 1.6.17, tal é equivalente às normas  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  serem equivalentes. □

**Exemplo 1.6.19.** Seja

$$l^2 := \{(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}.$$

$l^2$  possui uma norma natural  $\|\cdot\|_2$  dada por

$$\|(x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2}.$$

É possível provar que  $(l^2, \|\cdot\|_2)$  é um espaço de Banach.

Uma outra norma com a qual podemos dotar  $l^2$  é a nossa conhecida norma  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ , dada por  $\|(x_n)\|_{\text{sup}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|x_n|\}$ . Claramente  $\|(x_n)\|_{\text{sup}} \leq \|(x_n)\|_2, \forall (x_n) \in l^2$ .

Para simplificarmos a notação e evitarmos ambiguidades, dado um elemento  $(x_n)$  de  $l^2$ , nós o denotaremos por  $x$ , e o escreveremos como uma lista

enumerável de reais como  $x = (x_1, x_2, \dots)$ . Definindo então a sequência de elementos  $v_k \in l^2$  dada por

$$v_k := \underbrace{(1/k, \dots, 1/k, 0, 0, \dots)}_{k \text{ entradas}}$$

é tal que  $\|v_k\|_{\text{sup}} \rightarrow 0$ , mas  $\|v_k\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^k 1/k^2} \rightarrow +\infty$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ . Isso mostra que as duas normas não são equivalentes. Podemos ainda mostrar facilmente que  $(l^2, \|\cdot\|_{\text{sup}})$  não é completo. Para tanto, basta tomarmos a sequência de Cauchy em  $l^2$  dada por

$$w_j := \underbrace{(1, 1/\sqrt{2}, \dots, 1/\sqrt{j}, 0, 0, \dots)}_{j \text{ primeiras posições}}.$$

Vê-se que  $w_j$  converge uniformemente para  $w = (1, 1/\sqrt{2}, \dots, 1/\sqrt{n}, \dots)$ , e como  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = +\infty$  segue-se que  $w \notin l^2$ .

**Exemplo 1.6.20.** Todas as normas de  $\mathbb{R}$  são equivalentes. De fato, são múltiplas positivas da função valor absoluto. Para ver isso, seja  $\|\cdot\|$  uma norma qualquer. Então, dado  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\|x\| = |x| \cdot \|1\|,$$

o que prova nossa afirmação.

**Teorema 1.6.21.** *Todas as normas de  $\mathbb{R}^k$  são equivalentes.*

**Prova:** Mostraremos que todas as normas de  $\mathbb{R}^k$  são equivalentes à norma da soma. Seja  $\{e_1, \dots, e_k\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^k$ , seja  $\|\cdot\|_s$  a norma da soma e seja  $\|\cdot\|$  uma norma qualquer. Dado  $v \in \mathbb{R}^k$ , podemos escrever de modo único  $v = \sum_{j=1}^k v_j \cdot e_j$ , com  $v_j \in \mathbb{R}, \forall j = 1 \dots k$ . Aplicando a desigualdade triangular, obtemos:

$$\|v\| \leq \sum_{j=1}^k \|v_j \cdot e_j\| = \sum_{j=1}^k |v_j| \cdot \|e_j\| \leq \sum_{j=1}^k |v_j| \cdot \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_k\|\}.$$

Fazendo  $c_s := \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_k\|\}$ , concluímos que

$$\|v\| \leq c_s \cdot \sum_{j=1}^k |v_j| = c_s \cdot \|v\|_s,$$

que é uma das desigualdades que queríamos provar. Note que essa desigualdade implica que  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty)$  é uma aplicação contínua (de fato, Lipschitz) do espaço vetorial normado  $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_s)$  na reta. Ainda mais, a esfera unitária na norma da soma

$$S_s^{k-1} := \{x \in \mathbb{R}^k; \|x\|_s = 1\}$$

é compacta na métrica produto de  $\mathbb{R}^k$  (e portanto, na norma da soma). Isto é porque  $S_s^{k-1}$  é um conjunto fechado (na métrica oriunda da norma da soma) contido em um retângulo fechado e limitado de  $\mathbb{R}^k$ . Como vimos, tais retângulos são compactos, pois são produtos cartesianos de intervalos compactos da reta.

Assim sendo, como  $\|\cdot\|$  é contínua e  $S_s^{k-1}$  é compacta, existe  $y \in S_s^{k-1}$  tal que  $\|y\| = c = \inf \|\cdot\|(S_s^{k-1})$ . Temos que

$$y \in S_s^{k-1} \Rightarrow \|y\|_s = 1 \Rightarrow y \neq 0,$$

donde deduzimos que  $c = \|y\| > 0$ , pois  $\|\cdot\|$  é norma, só se anulando em  $0 \in \mathbb{R}^k$ .

Finalmente, dado  $0 \neq v \in \mathbb{R}^k$ , temos

$$\|v\| = \left\| \frac{v}{\|v\|_s} \cdot \|v\|_s \right\| = \underbrace{\left\| \frac{v}{\|v\|_s} \right\|}_{\in S_s^{k-1}} \cdot \|v\|_s \geq c \cdot \|v\|_s,$$

provando a desigualdade restante. □

**Corolário 1.6.22.** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado real de dimensão finita  $k$  e seja  $\hat{E}$  um espaço de Banach qualquer. Então, toda aplicação linear  $A : E \rightarrow \hat{E}$  é contínua.*

**Prova:**

Seja  $\|\cdot\|_E$  a norma de  $E$ . Tome  $(w_1, w_2, \dots, w_k)$  uma base de  $E$  e  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow E$  o único isomorfismo linear tal que  $L(e_j) = w_j, \forall j \in \{1, \dots, k\}$  onde  $(e_1, \dots, e_k)$  constitui a base canônica de  $\mathbb{R}^k$ . Então podemos definir a norma  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty)$  por:

$$\|v\|_{\mathbb{R}^k} := \|L(v)\|_E,$$

o que implica, de imediato, que  $L$  é uma *isometria* entre os espaços  $\mathbb{R}^k$  e  $E$ . Em particular,  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow E$  e sua inversa  $L^{-1} : E \rightarrow \mathbb{R}^k$  são ambas contínuas:

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^k, \|v\|_{\mathbb{R}^k} = 1} \{ \|L(v)\|_E \} = 1$$

e

$$\sup_{w \in E, \|w\|_E = 1} \{ \underbrace{\|L^{-1}(w)\|_{\mathbb{R}^k}}_{=\|L \circ L^{-1}(w)\|_E = \|w\|_E} \} = 1.$$

Definindo  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow E$  por  $T := A \circ L$ , temos:

$$\|T(v)\|_{\hat{E}} = \|T\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j e_j\right)\|_{\hat{E}} \leq \sum_{j=1}^k |\alpha_j| \|T(e_j)\|_{\hat{E}} \leq$$

$$\max_{j \in \{1, \dots, k\}} \{ \|T(e_j)\|_{\hat{E}} \} \cdot \sum_{j=1}^k |\alpha_j| = \max_{j \in \{1, \dots, k\}} \{ \|T(e_j)\|_{\hat{E}} \} \cdot \|v\|_s \leq$$

(pelo teorema  $\|\cdot\|_s$  e  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^k}$  são equivalentes, em particular existe  $c > 0$  tal que  $\|\cdot\|_s \leq c \|\cdot\|_{\mathbb{R}^k}$ )

$$c \cdot \max_{j \in \{1, \dots, k\}} \{ \|T(e_j)\|_{\hat{E}} \} \cdot \|v\|_{\mathbb{R}^k},$$

ou seja,  $T$  é contínua em  $\mathbb{R}^k$  dotada da norma  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^k}$ . Como  $A = T \circ L^{-1}$ , tal implica que

$$\sup_{w \in E, \|w\|_E = 1} \{ \|A(w)\|_{\hat{E}} \} \leq \|T\| \sup_{w \in E, \|w\|_E = 1} \{ \|L^{-1}(w)\|_{\hat{E}} \} = \|T\|,$$

implicando a continuidade de  $A$ .

□

## 1.7 Exercícios

1. Sejam  $X$  um espaço métrico,  $a \in X$ ,  $E$  espaço de Banach e seja

$$\text{Lip}^a(X) := \{f : X \rightarrow E; f \text{ é Lipschitz e } f(a) = 0\}.$$

Defina  $\|f\| := \text{Lip}(f)$ ,  $\forall f \in \text{Lip}^a(X)$ . Verifique se  $\|\cdot\|$  é uma norma e se  $(\text{Lip}^a(X), \|\cdot\|)$  é de Banach.

2. Seja  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação linear. Mostre que  $L$  é contínua.
3. Seja  $E$  um espaço vetorial normado completo, ou espaço de Banach. Vimos que qualquer aplicação linear  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow E$  é contínua. Há necessidade de  $E$  ser completo? E se tivéssemos a aplicação linear  $L : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $L$  seria automaticamente contínua? Prove ou exiba algum contra-exemplo.
4. Seja  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação injetiva. Mostre que existe  $c > 0$  tal que  $\|L(v)\| \geq c \cdot \|v\|, \forall v \in \mathbb{R}^k$ .
5. Sejam  $E, \hat{E}$  espaços vetoriais normados, com  $L : E \rightarrow \hat{E}$  um isomorfismo linear (ou seja, uma aplicação linear bijetiva), e suponha que  $L^{-1}$  seja contínua (a continuidade de uma aplicação linear não é imediata quando os espaços têm dimensão infinita). Mostre que existe  $c > 0$  tal que  $\|L(v)\| \geq c \cdot \|v\|, \forall v \in E$ .
6. Seja

$$E := \{p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, p \text{ é polinômio.}\}$$

Mostre que  $E$ , munido com  $\|p\| := \sup_{t \in [a, b]} \{|p(t)|\}$  é um espaço vetorial normado (não completo). Dado  $p \in E$  de grau  $n$ , digamos  $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ , com  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , sua derivada é definida como o polinômio de grau  $n - 1$  dado por  $p'(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + na_n t^{n-1}$ . Mostre que a aplicação derivada  $D : E \rightarrow E$  dada por  $(D(p)) := p'$  é linear e não é contínua.

7. No exercício anterior, considere o subespaço

$$E_n := \{p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, p \text{ é polinômio de grau } \leq n\}.$$

Mostre que  $E_n$  é um subespaço de  $E$  de dimensão  $n + 1$ , e que  $D(E_n) \subset E_n$ . Conclua, usando o exercício 2 que a restrição da derivada a  $E_n$  é contínua. Calcule a matriz de  $D|_{E_n}$ .

8. Sejam  $E_1, E_2, E_3$  espaços vetoriais normados, com normas respectivamente  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3$ . Uma aplicação  $q : E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$  é chamada de bilinear (ou produto) se fixados quaisquer  $v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$  as aplicações:

$$q_{v_1} : E_2 \rightarrow E_3, \quad q_{v_1}(w_2) = q(v_1, w_2), \forall w_2 \in E_2$$

e

$$q_{v_2} : E_1 \rightarrow E_3, \quad q_{v_2}(w_1) = q(w_1, v_2), \forall w_1 \in E_1$$

são lineares. Mostre que as seguintes assertivas são equivalentes para uma aplicação bilinear  $q : E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ :

- (a)  $q$  é contínua;
- (b)  $q$  é contínua em algum ponto  $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ ;
- (c)  $q$  é contínua em  $(0, 0) \in E_1 \times E_2$ ;
- (d) Existe um número real  $c > 0$  tal que  $\|q(w_1, w_2)\|_3 \leq c, \forall (w_1, w_2) \in E_1 \times E_2$  com  $\|(w_1, w_2)\| = 1$ .
- (e) Existe um número real  $c > 0$  tal que  $\|q(w_1, w_2)\|_3 \leq c \cdot \|w_1\|_1 \cdot \|w_2\|_2, \forall (w_1, w_2) \in E_1 \times E_2$ .

9. (Espaços de Fréchet). Seja  $E$  um espaço vetorial. *seminorma* em  $E$  é uma função  $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty)$  tal que:

i  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in E$ .

ii  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|; \forall v, w \in E$  (desigualdade triangular).

Note que se  $\|\cdot\|$  é uma seminorma,  $\|0\| = 0$ , mas podemos ter  $\|v\| = 0$  sem que  $v$  seja o vetor nulo.

Suponha que para um espaço vetorial  $E$  exista uma família enumerável de seminormas  $\{\|\cdot\|_k : E \rightarrow [0, +\infty), k \in \mathbb{N}\}$  tal que  $\|v\|_k = 0, \forall k = 0 \Leftrightarrow v = 0$ . Tome  $(\alpha_k)$  uma sequência de números positivos tais que  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < +\infty$ . Mostre que a aplicação  $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty)$  dada por

$$d(v, w) := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\|v - w\|_k}{1 + \|v - w\|_k}, \forall v, w \in E$$

é uma métrica em  $E$  e que dada uma sequência  $v_n \in E$  e um vetor  $w \in E$ , temos

$$d(v_n, w) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|v_n - w\|_k \rightarrow 0, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

**Observação 1.7.1.** Se o espaço vetorial  $E$ , dotado da métrica acima, for completo (como espaço métrico), então dizemos que  $E$  é um *espaço de Fréchet*. Note que um espaço de Banach é um caso particular de espaço de Fréchet.

10. Mostre que se  $E$  é um espaço vetorial normado, com norma  $\|\cdot\|$  e colocamos  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_k, \forall k \in \mathbb{N}$  e  $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty)$  a métrica do exercício anterior, então a métrica dada pela norma e a métrica  $d$  são equivalentes, mas não Lipschitz-equivalentes.

# Capítulo 2

## Aplicações deriváveis

Neste capítulo, apresentamos o conceito de aplicação derivável, ou seja, aplicação localmente (em uma vizinhança de cada ponto de seu domínio) bem aproximada por uma aplicação afim. Demonstramos resultados fundamentais em torno deste conceito, como a regra da Cadeia (acerca da composta de aplicações deriváveis). Contudo, o núcleo central deste capítulo é ocupado pela Desigualdade do Valor Médio. Dentre os inúmeros resultados consequentes daquela Desigualdade, estão o estabelecimento de condições suficientes para a convergência uniforme de uma sequência de aplicações deriváveis e mesmo um critério para a diferenciabilidade de aplicações tendo como domínio um aberto de um espaço vetorial produto (como veremos na seção intitulada “Derivadas Parciais”).

**Definição 2.0.2.** (Aplicação derivável em  $x_0$ / Derivada em  $x_0$ .) Sejam  $E$  e  $\tilde{E}$  espaços vetoriais normados e seja  $U \subset E$  um aberto, com  $x_0 \in U$ . Dizemos que uma aplicação  $f : U \rightarrow \tilde{E}$  é *derivável em  $x_0$*  se existe uma aplicação linear  $T \in \mathcal{L}(E; \tilde{E})$  tal que para todo  $x = x_0 + h \in U$ , podemos escrever

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + T \cdot h + \rho(h) \cdot \|h\|_E, \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0.$$

Nesse caso,  $T$  é chamada de *derivada de  $f$  em  $x_0$* , também denotada por  $f'(x_0)$ .

A derivada de uma aplicação linear, se existir, é única. De fato, se  $T_1$  e  $T_2$  forem derivadas de  $f$  em  $x_0$ , dado  $h \in E, h \neq 0$ , temos:

$$\|T_1 \cdot h - T_2 \cdot h\|_{\tilde{E}} \leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - T_1 \cdot h\| + \|f(x_0 + h) - f(x_0) - T_2 \cdot h\| =$$

$$\|\rho_1(h) + \rho_2(h)\|_{\tilde{E}} \cdot \|h\|_E,$$

onde  $\rho_1(h) \rightarrow 0$  e  $\rho_2(h) \rightarrow 0$  quando  $\|h\| \rightarrow 0$ . Trocando  $h$  por  $t \cdot h, t > 0$  na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \|T_1 \cdot th - T_2 \cdot th\|_{\tilde{E}} &\leq \|\rho_1(th) + \rho_2(th)\|_{\tilde{E}} \cdot \|th\|_E \Leftrightarrow \\ \|T_1 \cdot h - T_2 \cdot h\|_{\tilde{E}} &\leq \|\rho_1(th) + \rho_2(th)\|_{\tilde{E}} \cdot \|h\|_E \end{aligned}$$

Fazendo  $t \rightarrow 0$ , temos que  $\|th\|_E \rightarrow 0$ , logo

$$0 \leq \|T_1 \cdot h - T_2 \cdot h\|_{\tilde{E}} \leq \|\rho_1(th) + \rho_2(th)\|_{\tilde{E}} \cdot \|h\|_E \rightarrow 0 \Rightarrow T_1 \cdot h = T_2 \cdot h;$$

como  $h \neq 0$  é arbitrário, segue-se que  $T_1 = T_2$ .

**Proposição 2.0.3.** *Sejam  $E, \tilde{E}$  espaços vetoriais normados e  $U \subset E$  um aberto. Se  $f : U \rightarrow \tilde{E}$  é uma aplicação derivável em  $x_0 \in U$ , então  $f$  é contínua em  $U$ .*

**Prova:** Seja  $T := f'(x_0)$ . Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $\delta > 0$  tal que

$$\|T \cdot h\|_{\tilde{E}} = \|T \cdot h - T \cdot 0\|_{\tilde{E}} < \epsilon/2, \forall h \in E, \|h\|_E < \delta$$

e tal que

$$\|\rho(h) \cdot \|h\|\| < \epsilon/2, \forall h \in E, \|h\|_E < \delta.$$

Por conseguinte,  $\|f(x_0+h) - f(x_0)\|_{\tilde{E}} < \epsilon$ , para todo  $h \in E$  tal que  $\|h\|_{\tilde{E}} < \delta$ , implicando a continuidade de  $f$  em  $x_0$ .

□

**Definição 2.0.4.** (Derivada de  $f$ ). Se uma aplicação  $f : U \subset E \rightarrow \tilde{E}$  for derivável em todos os pontos de  $U$ , definimos a *derivada*  $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(E, \tilde{E})$  de  $f$  dada por  $x \mapsto f'(x)$ , onde  $f'(x)$  é a derivada de  $f$  em  $x \in U$ .

**Observação 2.0.5.** (Derivadas de ordem superior). Na proposição 1.6.13 da página 51, provamos que  $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$  é um espaço vetorial normado, dotado da norma do operador. Assim, caso a derivada  $f' : U \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(E, \tilde{E})$  de  $f$  esteja definida, podemos perguntar sobre a derivada de  $f'$ , obtendo (ou não)  $(f')'$ , chamada simplesmente de  $f''$ , ou derivada segunda de  $f$ . A mesma pergunta feita para  $f'$  poderá ser feita para a derivada segunda, obtendo-se (ou não) a derivada terceira de  $f$  e assim sucessivamente.

**Teorema 2.0.6.** (Regra da Cadeia). *Sejam  $f : U \rightarrow V$  e  $g : V \rightarrow \hat{E}$  aplicações definidas, respectivamente, nos abertos  $U \subset E$  e  $V \subset \tilde{E}$ , onde  $E, \tilde{E}$  e  $\hat{E}$  são espaços vetoriais normados. Se  $f$  é derivável em  $u \in U$  e  $g$  é derivável em  $v = f(u) \in V$ , então  $h = g \circ f$  é derivável em  $u \in U$ , e sua derivada neste ponto é:*

$$h'(u) = (g \circ f)'(u) = g'(f(u)) \circ f'(u) = g'(f(u)) \cdot f'(u)$$

**Prova:** Escrevamos

$$f(u + h) = f(u) + f'(u) \cdot h + \rho(h)\|h\|, \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0;$$

$$g(f(u) + k) = g(f(u)) + g'(f(u)) \cdot k + \sigma(k)\|k\|, \text{ com } \lim_{k \rightarrow 0} \sigma(k) = 0.$$

Temos então:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(u + h) &= g(f(u + h)) = g(f(u) + f'(u) \cdot h + \rho(h)\|h\|) = g(f(u)) + \\ &g'(f(u)) \cdot (f'(u) \cdot h + \rho(h)\|h\|) + \sigma(f'(u) \cdot h + \rho(h)\|h\|)\|f'(u) \cdot h + \rho(h)\|h\| = \\ &g(f(u)) + g'(f(u)) \cdot f'(u) \cdot h + g'(f(u)) \cdot \rho(h)\|h\| + \\ &\sigma(f'(u) \cdot h + \rho(h)\|h\|)\|f'(u) \cdot \frac{h}{\|h\|} + \rho(h)\| \cdot \|h\| \end{aligned}$$

Portanto, para mostrarmos que  $g \circ f$  é diferenciável em  $u$ , com  $(g \circ f)'(u) = g'(f(u)) \cdot f'(u)$ , basta vermos que

$$g'(f(u)) \cdot \rho(h) + \sigma(f'(u) \cdot h + \rho(h) \cdot \|h\|) \cdot \|f'(u) \cdot \frac{h}{\|h\|} + \rho(h)\| \rightarrow 0,$$

quando  $h \rightarrow 0$ . Mostremos que cada parcela acima tende a zero quando  $h \rightarrow 0$ :

- Para a primeira parcela, temos que

$$\|g'(f(u)) \cdot \rho(h)\| \leq \|g'(f(u))\| \cdot \|\rho(h)\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0,$$

pois  $f$  é derivável em  $u$  e logo  $\rho(h) \rightarrow 0$ .

- Como  $\rho(h) \rightarrow 0$ , quando  $h \rightarrow 0$ , temos em particular que fixado  $\epsilon_0 > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|\rho(h)\| < \epsilon_0$  para todo  $h$  com  $\|h\| < \delta$ . Daí,

$$\begin{aligned} \|\sigma(f'(u) \cdot h + \rho(h) \cdot \|h\|) \cdot \|f'(u) \cdot \frac{h}{\|h\|} + \rho(h)\| \| &\leq \\ \|\sigma(f'(u) \cdot h + \rho(h) \cdot \|h\|)\| \cdot (\|f'(u)\| + \epsilon_0). & \end{aligned}$$

Ou seja, só nos resta provar que

$$\sigma(f'(u) \cdot h + \rho(h) \cdot \|h\|) \rightarrow 0 \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Chamando  $H = f'(u) \cdot h + \rho(h) \cdot \|h\|$ , temos que

$$\|f'(u) \cdot h + \rho(h) \cdot \|h\|\| \leq \|f'(u)\| \cdot \|h\| + \|\rho(h)\| \cdot \|h\| \rightarrow 0,$$

quando  $h \rightarrow 0$ , isto é,  $H \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ . Como  $g$  é derivável em  $f(u)$ , tal implica que  $\sigma(H) \rightarrow 0$ , como queríamos mostrar.

□

## 2.1 Desigualdade do Valor Médio

Nesta subsecção enunciaremos e demonstraremos a desigualdade do valor médio, e seus inúmeros corolários. Tal desigualdade vale mesmo em dimensão infinita conforme veremos mais adiante. No momento, para nos familiarizarmos com o resultado, vejamos suas versões eventualmente mais fortes que vigem em dimensão finita:

Caso 1:  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $(a, b)$  e contínua em  $[a, b]$ , com  $a < b$ . Então existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

**Prova:** Defina a função auxiliar  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a).$$

Mostremos que a desigualdade vale para  $g$  no lugar de  $f$ . Claramente  $g(a) = g(b) = 0$ ,  $g$  é diferenciável em  $(a, b)$  e é contínua em  $[a, b]$ , já que  $f$  o é. Da continuidade de  $g$  no compacto  $[a, b]$  temos que  $g$  atinge um máximo  $\alpha = g(x_\alpha)$  e um mínimo  $\omega = g(x_\omega)$  em pontos  $x_\alpha, x_\omega \in [a, b]$ . Se tanto o máximo como o mínimo forem iguais a zero, então  $g \equiv 0$  e logo  $g'(c) = 0, \forall c \in (a, b)$ , a desigualdade estaria provada. Assim, vamos supor que ou o máximo ou o mínimo de  $g$  seja diferente de zero. Sem perda, suponha que seja o máximo. Nesse caso, como  $g(x_\alpha) \neq 0 = g(a) = g(b)$ , temos que  $x_\alpha \in (a, b)$ . Afirmamos que no

ponto de máximo (assim como no de mínimo) a derivada se anula. Tal fato vale mesmo para funções diferenciáveis com domínio em abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Realmente:

$$\frac{g(x_\alpha + h) - g(x)}{\|h\|} = g'(x_\alpha) \cdot \frac{h}{\|h\|} + \frac{r(h)}{\|h\|};$$

tomando  $h = t \cdot g'(x_\alpha)$ , com  $t > 0$  e fazendo  $t$  suficientemente pequeno para que  $\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} < \|g'(x_\alpha)\|/2$ , temos:

$$\frac{g(x_\alpha + h) - g(x)}{\|h\|} = \|g'(x_\alpha)\| + \frac{r(h)}{\|h\|} > \frac{\|g'(x_\alpha)\|}{2} > 0,$$

donde concluímos que  $g(x_\alpha + h) > g(x)$ , absurdo. Por conseguinte, pondo  $c = x_\alpha$  a igualdade do Valor Médio vale para  $g$ . Mas então vale para  $f$ :

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f'(c) \cdot (b - a) = f(b) - f(a).$$

□

Caso 2:  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua no segmento de reta compacto  $[a, b] \subset U$  que une os pontos  $a$  e  $b$ , e diferenciável no segmento  $(a, b) := \{a + t \cdot (b - a); t \in (0, 1) \subset \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ , com  $a \neq b$ . Então existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

**Prova:** Defina a função auxiliar  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\varphi(t) = f(a + t \cdot (b - a)).$$

Pelo caso 1, existe  $t_0 \in (0, 1)$  tal que

$$\varphi'(t_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0) \Leftrightarrow f(b) - f(a) = \underbrace{df(a + t_0 \cdot (b - a))}_{:=c} \cdot (b - a) \Rightarrow$$

$$f(b) - f(a) = df(c) \cdot (b - a)$$

□

Note que a prova desse caso 2 vale sem modificações essenciais, para  $f$  com domínio contido em um espaço vetorial normado real qualquer (possivelmente de dimensão infinita), no lugar de  $\mathbb{R}^n$ .

Caso 3:  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$ .

Nesse caso, não vale a igualdade, mas a desigualdade:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup\{\|f'(c)\|; c \in (a, b)\} \cdot |b - a|,$$

onde a norma tomada é, por exemplo, a norma do máximo, que coincide com a norma do operador tomando a norma do máximo em  $\mathbb{R}^m$ .

**Prova:** Seja  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por

$$f(t) := (f_1(t), \dots, f_m(t)), \text{ onde } f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, m.$$

Então, pelo caso 1, existem  $c_1, \dots, c_m \in (a, b)$  tais que

$$f_j(b) - f_j(a) = f'_j(c_j) \cdot (b - a); j = 1, \dots, m \Rightarrow$$

$$|f_j(b) - f_j(a)| = |f'_j(c_j)| \cdot |b - a| \leq \|f'(c_j)\| \cdot |b - a| \leq$$

$$\max_{1 \leq k \leq m} \{\|f'(c_k)\|\} \cdot |b - a|, \forall j \in \{1, \dots, m\} \Rightarrow$$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \max_{1 \leq k \leq m} \{\|f'(c_k)\|\} \cdot |b - a| \leq \sup\{\|f'(c)\|; c \in (a, b)\} \cdot |b - a|.$$

□

Caso 4:  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , contínua no segmento de reta compacto  $[a, b] \subset U$  que une os pontos  $a$  e  $b$ , e diferenciável no segmento  $(a, b) := \{a + t \cdot (b - a); t \in (0, 1) \subset \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ , com  $a \neq b$ . Então existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup\{\|f'(c)\|; c \in (a, b)\} \cdot \|b - a\|$$

**Prova:** A exemplo do caso 2, defina a função auxiliar  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  por

$$\varphi(t) = f(a + t \cdot (b - a)).$$

Pelo caso 3, temos que

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \sup_{t \in (0, 1)} \{\|\varphi'(t)\|\} = \sup\{\|f'(a + t \cdot (b - a)) \cdot (b - a)\|, t \in (0, 1)\} \leq$$

(Usando propriedade da norma do operador)

$$\sup\{\|f'(a + t \cdot (b - a))\| \cdot \|b - a\|, t \in (0, 1)\} = \sup\{\|f'(c)\|, c \in (a, b)\} \cdot \|b - a\|.$$

□

O seguinte exemplo mostra que a igualdade do Valor Médio não vale em geral para aplicações com imagem em  $\mathbb{R}^m$ .

**Exemplo 2.1.1.** Seja  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(t) := (\cos(t), \sin(t))$ . Temos que

$$f(2\pi) - f(0) = (1, 0) - (1, 0) = (0, 0);$$

por outro lado,

$$f'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0), \forall t \in [0, 2\pi],$$

o que implica que não existe  $c \in [0, 2\pi]$  tal que  $0 = f(2\pi) - f(0)$  seja igual a  $f'(c) \cdot (2\pi - 0)$ .

Enunciaremos e provemos no contexto de espaços vetoriais normados reais quaisquer o

**Teorema 2.1.2.** (*Desigualdade do Valor Médio*). *Sejam  $A, E$  espaços vetoriais (sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) normados,  $U \subset A$  um aberto e  $a, b \in U$  tais que o segmento que os une  $[a, b] := \{a + t \cdot (b - a), t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}\}$  está contido em  $U$ . Seja  $f : U \rightarrow E$  uma aplicação contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b) := \{a + t \cdot (b - a), t \in (0, 1) \subset \mathbb{R}\}$ . Então vale a desigualdade do valor médio:*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in (a, b)} \|f'(x)\| \cdot \|b - a\|,$$

onde a norma da derivada em  $x$  é a do operador.

**Prova:** Sem perda, suponha que  $f'$  seja limitada em  $(a, b)$ , caso contrário nada temos a provar. Seja  $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$  a aplicação dada por

$$\varphi(t) = f(a + t \cdot (b - a));$$

se mostrarmos que  $\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \sup_{t \in (0, 1)} \{\|\varphi'(t)\|\}$ , o resultado se seguirá. De fato, nesse caso teríamos:

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \sup_{t \in (0, 1)} \{\|\varphi'(t)\|\} = \\ &\sup_{t \in (0, 1)} \{\|f'(a + t \cdot (b - a))\| \cdot \|b - a\|\} \leq \sup_{x \in (a, b)} \{\|f'(x)\| \cdot \|b - a\|\} \end{aligned}$$

Demonstremos portanto a desigualdade do Valor Médio para uma aplicação  $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$ , contínua em  $[0, 1]$  e derivável (e com derivada limitada) em

$(0, 1)$ . Nossa estratégia será a seguinte: tomaremos  $c \in (0, 1)$  e mostraremos que

$$\begin{aligned}\|\varphi(1) - \varphi(c)\| &\leq \sup_{t \in [c, 1]} \{\|\varphi'(t)\|\} \cdot (1 - c); \\ \|\varphi(c) - \varphi(0)\| &\leq \sup_{t \in (0, c]} \{\|\varphi'(t)\|\} \cdot (c - 0).\end{aligned}$$

Das inequações acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\|\varphi(1) - \varphi(0)\| &\leq \|\varphi(1) - \varphi(c)\| + \|\varphi(c) - \varphi(0)\| \leq \\ &\sup_{t \in [c, 1]} \{\|\varphi'(t)\|\} \cdot (1 - c) + \sup_{t \in (0, c]} \{\|\varphi'(t)\|\} \cdot (c - 0) \leq \\ &\sup_{t \in (0, 1)} \{\|\varphi'(t)\|\} \cdot (1 + c - c - 0) = \sup_{t \in (0, 1)} \{\|\varphi'(t)\|\}.\end{aligned}$$

Tomemos por conseguinte  $c \in (0, 1)$  e fixemos  $M > \sup_{r \in (0, 1)} \{\varphi'(r)\}$ . Dado  $t > 0$ , escrevamos

$$\varphi(c + t) - \varphi(c) = \varphi'(c) \cdot t + \rho(t) \cdot |t|.$$

Tomando  $\delta > 0$  tal que  $\|\rho(t)\| < (M - \sup_{s \in (0, 1)} \{\varphi'(s)\})$  segue-se:

$$\|\varphi(c + t) - \varphi(c)\| \leq \|\varphi'(c)\| \cdot |t| + \|\rho(t)\| \cdot |t| = (\|\varphi'(c)\| + \|\rho(t)\|) \cdot t < M \cdot t.$$

Vamos definir o seguinte conjunto:

$$S := \{t \in [0, 1 - c]; \|\varphi(c + s) - \varphi(c)\| \leq M \cdot s, \forall s \in [0, t]\}.$$

Claramente  $S \neq \emptyset$ , pois  $[0, \delta) \subset S$ . Além disso, se  $t \in S$ , então todo  $0 \leq \tilde{t} \leq t$  também pertence a  $S$ . Seja  $\hat{t} := \sup S$ . Mostremos que  $\hat{t} \in S$ . De fato, seja  $S \ni t_j \rightarrow \hat{t}$ . Da continuidade de  $\varphi$  em  $[0, 1]$  temos que

$$\|\varphi(c + t_n) - \varphi(c)\| \leq M \cdot t_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|\varphi(c + \hat{t}) - \varphi(c)\| \leq M \cdot \hat{t}.$$

Ademais, se  $0 \leq s < \hat{t}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $S \ni t_{n_0} > s$ , o que implica que  $\|\varphi(c + s) - \varphi(c)\| \leq M \cdot s$ , donde se conclui que  $\hat{t} \in S$ . Suponha por absurdo que  $\hat{t} < 1 - c$ . Então, como  $\varphi$  é derivável em  $c + \hat{t} =: \hat{c}$ , concluímos, a exemplo do que fizemos para uma vizinhança de  $c$  mais acima, que existe  $\hat{\delta} > 0$  tal que

$$\|\varphi(\hat{c} + h) - \varphi(\hat{c})\| \leq M \cdot h, \forall 0 \leq h < \hat{\delta}.$$

Mas daí, dado  $s \in [\hat{t}, \hat{t} + \hat{\delta})$  teríamos:

$$\begin{aligned} \|\varphi(c+s) - \varphi(c)\| &\leq \|\varphi(c+s) - \varphi(c+\hat{t})\| + \|\varphi(c+\hat{t}) - \varphi(c)\| \leq \\ &M \cdot (s - \hat{t} + \hat{t} - c) = M \cdot (s - c). \end{aligned}$$

Como para  $s \in [0, \hat{t}]$  a desigualdade acima é imediata, segue-se que  $[0, \hat{t} + \hat{\delta}) \subset S$ , o que é absurdo, já que  $\hat{t} = \sup S$ .

Logo  $\sup S = 1 - c$ , donde concluímos que

$$\|\varphi(1) - \varphi(c)\| \leq M \cdot (1 - c).$$

Como a desigualdade acima vale para qualquer  $M > \sup_{r \in (0,1)} \{\varphi'(r)\}$ , segue-se que também vale para  $\sup_{r \in (0,1)} \{\varphi'(r)\}$ . A desigualdade em  $(0, c]$  é igualmente fácil de provar. □

**Corolário 2.1.3.** *Sejam  $A, E$  espaços vetoriais (sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) normados e  $U \subset A$  um aberto conexo. Seja  $f : U \rightarrow E$  uma aplicação diferenciável tal que  $f'(x) = 0, \forall x \in U$ . Então  $f$  é constante em  $U$ .*

**Prova:** Seja  $x_0 \in U$ . Mostremos que  $C := \{x \in U; f(x) = f(x_0)\} \ni x_0$  é aberto e fechado em  $U$ . De fato,  $C$  é fechado porque  $C = f^{-1}\{f(x_0)\}$ , e obviamente  $\{f(x_0)\}$  é fechado em  $E$ , como qualquer conjunto compacto em um espaço Hausdorff.  $f$  sendo diferenciável é contínua, logo pré-magem por  $f$  de qualquer fechado de  $E$  é fechada em  $U$ . Falta apenas mostrar que  $C$  é aberto. Seja  $u \in C$ . Como  $U$  é aberto,  $\exists r_u > 0$  tal que  $B(u, r_u) \subset U$ . Visto que o espaço  $A$  é vetorial normado (sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), dados  $y, z \in B(u, r_u)$ , o segmento  $[y, z] \subset B(u, r_u)$ . De fato, dado  $t \in [0, 1]$ :

$$\|t \cdot y + (1-t) \cdot z - u\| \leq t\|y - u\| + (1-t)\|z - u\| < t \cdot r_u + (1-t) \cdot r_u = r_u.$$

Logo, aplicando a Desigualdade do Valor Médio, temos:

$$\|f(y) - f(z)\| \leq \sup_{x \in [y,z]} \{\|f'(x)\|\} \cdot \|y - z\| = 0 \Rightarrow f(y) = f(z).$$

Fazendo  $z = u$ , temos que  $f(y) = f(u) = f(x_0), \forall y \in B(u, r_u)$ . Portanto  $B(u, r_u) \subset C$ . Como  $u \in C$  é arbitrário, concluímos que  $C$  é aberto. Como  $C$  também é fechado em  $U$  e  $C \neq \emptyset$ , da conexidade de  $U$  segue-se que  $C = U$ , ou seja,  $f(x)$  é constante igual a  $f(x_0)$  em  $U$ . □

**Corolário 2.1.4.** *Sejam  $A, E$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Seja  $f : U \rightarrow E$  uma aplicação no aberto  $U \subset A$ . Se o segmento de reta fechado  $[u, u+h]$  está contido em  $U$  e se  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $(u, u+h)$  e contínua em  $[u, u+h]$ , então para toda  $T \in \mathcal{L}(A, E)$  vale*

$$\|f(u+h) - f(u) - T \cdot h\| \leq \sup_{t \in (0,1)} \{\|f'(u+th) - T\|\} \cdot \|h\|$$

**Prova:** Considere  $g := f - T$ . Então

$$\begin{aligned} \|f(u+h) - f(u) - T \cdot h\| &= \|g(u+h) - g(u)\| \leq \\ \sup_{t \in (0,1)} \{\|g'(u+th)\|\} \cdot \|h\| &= \sup_{t \in (0,1)} \{\|f'(u+th) - T\|\} \cdot \|h\|. \end{aligned}$$

□

**Definição 2.1.5.** (Diferenciabilidade uniforme). Uma aplicação diferenciável  $f : U \subset A \rightarrow E$  diz-se *uniformemente diferenciável* em  $X \subset U$  se, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\forall x \in X, h$  com  $\|h\| < \delta$  e  $x+h \in U$ , temos

$$\|r_x(h)\| = \|f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h\| \leq \epsilon \cdot \|h\|.$$

**Corolário 2.1.6.** *Seja  $f : U \subset A \rightarrow E$  de classe  $C^1$  no aberto  $U$  de um espaço vetorial (real ou complexo) normado  $A$ . Então dado um compacto  $K \subset U$ ,  $f$  é uniformemente diferenciável em  $K$ .*

**Prova:** Seja  $\epsilon > 0$ . Para cada  $y \in K$ , tome uma bola  $B_y = B(y, \delta_y) \subset U$  tal que

$$z \in B_y \Rightarrow \|f'(y) - f'(z)\| < \epsilon/2.$$

Tal bola existe pela continuidade da  $f'$ , já que  $f \in C^1$ . Seja  $\delta > 0$  o número de Lebesgue no sentido forte (vide a definição antes do teorema 1.4.25, e o próprio teorema) da cobertura  $\cup_{y \in K} B_y$ . Isso significa que dado qualquer ponto  $x \in K$ , existe uma bola  $B_y \supset B(x, \delta)$ ,  $y \in K$ . Dado  $h \in A$  tal que  $\|h\| < \delta$  e  $x \in K$ , com  $B(x, \delta) \subset B_y$  temos então:

$$\|f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h\| \leq \|f(x+h) - f(x) - f'(y) \cdot h\| + \|(f'(x) - f'(y)) \cdot h\| \leq$$

(aplicando o corolário 2.1)

$$\sup_{t \in (0,1)} \{\|f'(x+th) - f'(y)\|\} \cdot \|h\| + \|f'(y) - f'(x)\| \cdot \|h\| < \epsilon \cdot \|h\| \Rightarrow$$

$$\|f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h\| \leq \epsilon \cdot \|h\|, \forall x \in K, \forall h \in B(0, \delta) \subset A.$$

**Observação 2.1.7.** Suponha que  $f$  seja diferenciável em  $U$  mas que  $f'$  seja contínua (apenas) no ponto  $x_0 \in U$ . Então existe uma bola  $B(x_0, 3\delta)$  tal que  $\forall x \in B(x_0, 3\delta)$  temos

$$\|f'(x) - f'(x_0)\| < \epsilon/2.$$

Daí, do mesmo modo que na prova do último corolário, para  $z \in B(x_0, \delta)$ ,  $h \in B(0, 2\delta)$ , temos

$$\begin{aligned} \|f(z+h) - f(z) - f'(z) \cdot h\| &\leq \|f(z+h) - f(z) - f'(x_0) \cdot h\| + \|(f'(z) - f'(x_0)) \cdot h\| \leq \\ &\sup_{t \in (0,1)} \{\|f'(z+th) - f'(x_0)\|\} \cdot \|h\| + \|f'(z) - f'(x_0)\| \cdot \|h\| < \epsilon \cdot \|h\| \end{aligned}$$

Isso significa que se  $f'$  é contínua em  $x_0$ , então dado  $\epsilon > 0$  existe uma vizinhança  $B_{x_0} := B(x_0, \delta)$  tal que o resto  $r_z : B(0, 2\delta) \rightarrow E$  dado por

$$r_z(h) := f(z+h) - f(z) - f'(z) \cdot h$$

é  $\epsilon$ -Lipschitz, para todo  $z \in B_{x_0}$ .

O próximo corolário nos dá uma maneira de calcular a derivada em um ponto  $x_0 \in U$  usando apenas de valores de  $f$  em pontos próximos de  $x_0$ , quando  $f'$  é contínua em  $x_0$ .

**Corolário 2.1.8.** *Sejam  $A, E$  espaços vetoriais normados,  $U \subset A$  um aberto e suponha  $f : U \rightarrow E$  diferenciável com derivada contínua em  $x_0 \in U$ . Sejam  $x_n, y_n \in U$  tais que  $x_n \rightarrow x_0$  e  $y_n \rightarrow x_0$  e  $(x_n - y_n)/\|x_n - y_n\| \rightarrow v$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{f(x_n) - f(y_n)}{\|x_n - y_n\|} - f'(x_0) \cdot v \right\| = 0$$

**Prova:** Pelo corolário 2.1, temos:

$$\|f(x_n) - f(y_n) - f'(x_0)(x_n - y_n)\| \leq \sup_{x \in (x_n, y_n)} \{\|f'(x) - f'(x_0)\|\} \cdot \|x_n - y_n\|.$$

Da continuidade de  $f'$  em  $x_0$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| < \delta &\Rightarrow \|f'(x) - f'(x_0)\| < \epsilon/3 \Rightarrow x, y \in B(x_0, \delta) \Rightarrow \\ \|f'(x) - f'(y)\| &\leq \|f'(x) - f'(x_0)\| + \|f'(x_0) - f'(y)\| < \frac{2}{3}\epsilon. \end{aligned}$$

Tomando  $n_0$  tal que  $x_n, y_n \in B(x_0, \delta), \forall n \geq n_0$ , da convexidade das bolas em espaço normado temos

$$\|f(x_n) - f(y_n) - f'(x_0)(x_n - y_n)\| \leq \sup_{x \in (x_n, y_n)} \{\|f'(x) - f'(x_0)\|\} \cdot \|x_n - y_n\| \leq \frac{2}{3}\epsilon \|x_n - y_n\|.$$

Finalmente, tomando  $n_0$  suficientemente grande de modo a que  $\|f'(x_0) \cdot \left(\frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|} - v\right)\| < \epsilon/3, \forall n \geq n_0$  obtemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(x_n) - f(y_n)}{\|x_n - y_n\|} - f'(x_0) \cdot v \right\| &\leq \left\| \frac{f(x_n) - f(y_n) - f'(x_0) \cdot (x_n - y_n)}{\|x_n - y_n\|} \right\| + \\ &\quad \left\| f'(x_0) \cdot \frac{(x_n - y_n)}{\|x_n - y_n\|} - f'(x_0) \cdot v \right\| < \epsilon. \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.1.9.** *Seja  $x_0 \in U \subset A$  e suponha  $f : U \rightarrow E$  contínua em  $U$  e diferenciável em  $U \setminus \{x_0\}$ . Se existe o limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = T \in \mathcal{L}(A, E),$$

*então  $f$  é diferenciável em  $x_0$  e  $f'(x_0) = T$ .*

**Prova:** Pelo corolário 2.1 temos que

$$\frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T \cdot h\|}{\|h\|} \leq \sup_{t \in (0,1)} \|f'(x_0 + th) - T\|.$$

Ora, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \|f'(x_0 + th) - T\| < \epsilon, \forall t \in (0, 1),$$

pois existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = T$ . Assim,

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \sup_{t \in (0,1)} \|f'(x_0 + th) - T\| \leq \epsilon \Rightarrow$$

$$\frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T \cdot h\|}{\|h\|} \leq \epsilon \Rightarrow f'(x_0) = T.$$

□

**Observação 2.1.10.** Sejam  $A, E$  espaços vetoriais normados (sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) e seja  $U \subset A$  um aberto. Dada uma aplicação  $f : U \rightarrow E$ , a desigualdade do valor médio nos garante que se  $f$  é diferenciável em  $U$  com derivada limitada, então  $f$  é localmente Lipschitz em  $U$ . Contudo nesse caso mesmo quando  $U$  é limitado e  $A = \mathbb{R}^n$ ,  $f$  não é, em geral, globalmente Lipschitz. Por outro lado, se  $f$  for diferenciável apenas em um compacto  $K \subset U$ , a desigualdade do Valor Médio **não** nos garante que  $f$  é localmente Lipschitz em  $K$ , a menos que  $K$  seja convexo ou algo assim (por exemplo, se  $K$  possuir um ponto que se liga por segmentos de reta contidos em  $K$  aos seus demais pontos. Nesse caso diz-se que  $K$  é estrelado).

A desigualdade do Valor Médio nos permitiu encontrar cotas para a constante de Lipschitz de uma aplicação derivável. Vamos agora procurar resultados com a desigualdade com sentido oposto. Tais resultados serão particularmente úteis para as demonstrações do próximo capítulo.

**Proposição 2.1.11.** *Sejam  $A, E$  espaços vetoriais normados (sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), e  $U \subset A$  um aberto. Seja  $f : U \rightarrow E$  é diferenciável em  $x_0 \in U$ . Suponha que  $f'(x_0) \in \mathcal{L}(A, E)$  é injetiva, com inversa à esquerda  $M_E : E \rightarrow A$  também sendo uma aplicação linear contínua. Então  $\exists \delta > 0$  tal que  $f(x) \neq f(x_0)$ ,  $\forall x \in B(x_0, \delta)$ .*

**Prova:** Seja  $x \in U$ , e  $h = x - x_0$ . Então:

$$\frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} = \|f'(x_0) \cdot \frac{h}{\|h\|} + \frac{r(h)}{\|h\|}\| \geq \|f'(x_0) \cdot \frac{h}{\|h\|}\| - \left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\|$$

Afirmamos que existe  $c > 0$  tal que

$$\|f'(x_0) \cdot v\| \geq c \cdot \|v\|, \forall v \in A.$$

De fato, pondo  $c^{-1} = \|M_E\| > 0$ , temos

$$\|v\| = \|M_E \cdot f'(x_0) \cdot v\| \leq c^{-1} \cdot \|f'(x_0) \cdot v\|, \forall v \in A,$$

o que demonstra nossa afirmação.

Tome então  $\delta > 0$  tal que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| < c/2$$

Concluimos que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} > c - c/2 > 0.$$

Logo  $f(x) = f(x_0 + h) \neq f(x_0)$ ,  $\forall h$  tal que  $\|h\| < \delta$ . □

**Observação 2.1.12.** Em dimensão finita, a hipótese de que a inversa à esquerda de  $f'(x_0)$  seja contínua é desnecessária, já que toda aplicação linear com domínio de dimensão finita é automaticamente contínua.

Note que na última proposição **não** estamos dizendo que  $f|_{B(x_0, \delta)}$  é injetiva. Podem existir  $x_1, x_2 \in B(x_0, \delta)$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Mesmo que  $\exists f'(x)$  injetiva,  $\forall x \in U$ , tal não garante a injetividade, nem mesmo local, de  $f$ . Para garantir a injetividade local, em geral é necessário termos  $f$  de classe  $C^1$ . Tal é consequência da prova da última proposição e da observação 2.1.7 e a estabelecemos como nosso próximo resultado:

**Corolário 2.1.13.** *Sejam  $A, E$  espaços vetoriais normados (sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), e  $U \subset A$  um aberto. Seja  $f : U \rightarrow E$  diferenciável (em  $U$ ) com  $f'$  contínua em  $x_0 \in U$ . Suponha que  $f'(x_0) \in \mathcal{L}(A, E)$  é injetiva, com inversa à esquerda  $M_E : E \rightarrow A$  também sendo uma aplicação linear contínua. Então  $\exists \delta > 0$  tal que  $f|_{B(x_0, \delta)}$  é injetiva.*

**Prova:** Da prova da proposição 2.1.11 temos que existe  $c > 0$  tal que

$$\|f'(x_0) \cdot v\| \geq c \cdot \|v\|, \forall v \in A.$$

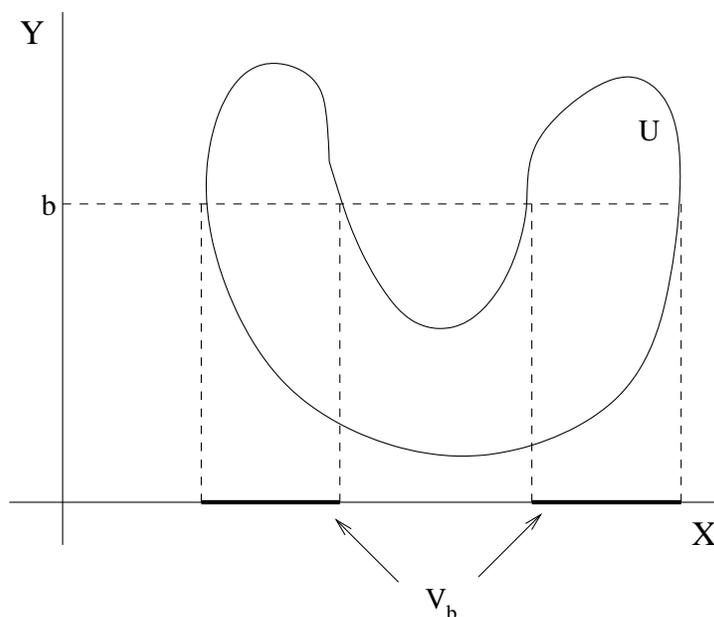
Da observação 2.1.7, temos que para  $\epsilon = c/4$  existe uma vizinhança  $B_{x_0} := B(x_0, \delta)$  tal que  $\|f'(x) - f'(x_0)\| < \epsilon, \forall x \in B_{x_0}$  e o resto  $r_z : B(0, 2\delta) \rightarrow E$  dado por

$$r_z(h) := f(z + h) - f(z) - f'(z) \cdot h$$

é  $\epsilon$ -Lipschitz, para todo  $z \in B_{x_0}$ . Logo, dados  $z$  e  $w = z + h \in B(x_0, \delta)$ , vale

$$\begin{aligned} \frac{\|f(w) - f(z)\|}{\|h\|} &= \left\| f'(z) \cdot \frac{h}{\|h\|} + \frac{r_z(h)}{\|h\|} \right\| \geq \\ &\|f'(x_0) \cdot \frac{h}{\|h\|}\| - \|(f'(x_0) - f'(z)) \cdot \frac{h}{\|h\|}\| - \left\| \frac{r_z(h)}{\|h\|} \right\| \geq \\ &c - \|f'(x_0) - f'(z)\| - c/4 \geq c/2 > 0 \end{aligned}$$

donde concluimos que  $f(w) \neq f(z)$  e portanto  $f|_{B(x_0, \delta)}$  é injetiva. □



## 2.2 Derivadas Parciais

Seja  $E = X \oplus Y$  um espaço vetorial normado real que possa ser escrito como soma direta de dois outros,  $X$  e  $Y$ . Com isso queremos dizer que  $E$  é isomorfo (como espaço vetorial normado real) ao espaço produto  $X \times Y$ . Cada elemento  $v \in E$  é escrito de maneira única como  $v = (x, y)$ ,  $x \in X, y \in Y$ . Também ao longo dessa seção  $U \subset E$  designará um aberto e  $Z$  um outro espaço vetorial normado.

**Definição 2.2.1.** (Derivadas parciais). Dada uma aplicação (não necessariamente contínua)  $f : U \subset (X \oplus Y) \rightarrow Z$ , as derivadas parciais (se existirem) de  $f$  em  $(a, b) \in U$  fixado são aplicações lineares tais que:

$$\begin{cases} \partial_1 f(a, b) : X \rightarrow Z \\ \partial_2 f(a, b) : Y \rightarrow Z \end{cases} \text{ e}$$

$$\begin{cases} f(a + h, b) = f(a, b) + \partial_1 f(a, b) \cdot h + r_1(h), \text{ com } \lim_{X \ni h \rightarrow 0} \frac{r_1(h)}{\|h\|} = 0; \\ f(a, b + k) = f(a, b) + \partial_2 f(a, b) \cdot k + r_2(k), \text{ com } \lim_{Y \ni k \rightarrow 0} \frac{r_2(k)}{\|k\|} = 0. \end{cases}$$

**Observação 2.2.2.** Uma derivada parcial pode ser vista como uma família de derivadas totais. Por exemplo, fixado  $b \in Y$  tal que exista  $(a, b) \in U$ , considere  $V_b := \{x \in X, (x, b) \in U\}$ . Então para todo  $x \in V_b$ ,  $\partial_1 f(x, b) = g'_b(x)$ , onde  $g_b : V_b \subset X \rightarrow Z$  é dada por

$$g_b(x) := f(x, b).$$

Isso é importante, pois significa que todos os teoremas de derivada total (como a regra da cadeia, a desigualdade do valor médio e mesmo os que demonstraremos nos próximos capítulos podem ser aplicados às derivadas parciais de  $f$  via  $g_b$ . Isso também implica a unicidade de  $\partial_1 f(a, b)$ .

**Observação 2.2.3.** Suponha que  $f : U \rightarrow Z$  seja diferenciável. Então

$$f'(x, y) \cdot (h, k) = \partial_1 f(x, y) \cdot h + \partial_2 f(x, y) \cdot k.$$

De fato,

$$f(x + h, y) = f(x) + f'(x) \cdot (h, 0) + r(h, 0);$$

pondo  $r_1(h) = r(h, 0)$ , vemos que

$$f'(x, y) \cdot (h, 0) = \partial_1 f(x, y) \cdot h;$$

similarmente vemos que

$$f'(x, y) \cdot (0, k) = \partial_2 f(x, y) \cdot k.$$

**Teorema 2.2.4.** *Seja  $f : U \subset X \oplus Y \rightarrow Z$  uma aplicação entre espaços vetoriais normados reais (ou complexos). Então*

$$f \in C^1 \Leftrightarrow \text{existem e são contínuas as aplicações}$$

$$\begin{array}{l} \partial_1 f : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Z) \quad \partial_2 f : U \rightarrow \mathcal{L}(Y, Z) \\ (a, b) \mapsto \partial_1 f(a, b) \quad \text{e} \quad (a, b) \mapsto \partial_2 f(a, b) \end{array}.$$

**Prova:** Suponha que  $\partial_1 f$  e  $\partial_2 f$  existem e são contínuas. Mostremos que  $f$  é derivável. Pela observação 2.2.3 acima, queremos mostrar então que

$$f'(x, y) \cdot (h, k) = \partial_1 f(x, y) \cdot h + \partial_2 f(x, y) \cdot k.$$

Mas

$$\begin{aligned} & \|f(x+h, y+k) - f(x, y) - \partial_1 f(x, y) \cdot h - \partial_2 f(x, y) \cdot k\| = \\ & \|f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y) - \partial_1 f(x, y) \cdot h - \partial_2 f(x, y) \cdot k\| \leq \\ & \|f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - \partial_1 f(x, y) \cdot h\| + \|f(x, y+k) - f(x, y) - \partial_2 f(x, y) \cdot k\| \leq \end{aligned}$$

(por corolário da desigualdade do Valor médio)

$$\sup_{0 < t < 1} \|\partial_1 f(x+th, y+k) - \partial_1 f(x, y)\| \cdot \|h\| + \|r_2(k)\|,$$

onde

$$r_2(k) := f(x, y+k) - f(x, y) - \partial_2 f(x, y)$$

é tal que  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_2(k)}{\|k\|} = 0$ , pela definição da derivada parcial  $\partial_2 f(x, y)$ . Por conseguinte, obtemos

$$\frac{\|f(x+h, y+k) - f(x, y) - \partial_1 f(x, y) \cdot h - \partial_2 f(x, y) \cdot k\|}{\|(h, k)\|} \leq$$

$$\sup_{0 < t < 1} \|\partial_1 f(x+th, y+k) - \partial_1 f(x, y)\| \cdot \frac{\|h\|}{\|(h, k)\|} + \frac{\|r_2(k)\|}{\|(h, k)\|} \leq$$

(tomando sem perda de generalidade  $\|(h, k)\| = \max\{\|h\|, \|k\|\}$ )

$$\sup_{0 < t < 1} \|\partial_1 f(x+th, y+k) - \partial_1 f(x, y)\| + \frac{\|r_2(k)\|}{\|k\|}.$$

Quando  $(h, k) \rightarrow 0$ , temos que tanto  $h \rightarrow 0$  quanto  $k \rightarrow 0$  e portanto

- $\partial_1 f(x+th, y+k) \rightarrow \partial_1 f(x, y)$ , pela continuidade de  $\partial_1 f$ ;
- $\frac{r_2(k)}{\|k\|} \rightarrow 0$ , pela existência da derivada parcial  $\partial_2 f$ .

Donde concluímos que  $f$  é diferenciável em  $(x, y)$ . Sejam  $\pi_1 : X \oplus Y \rightarrow X$  e  $\pi_2 : X \oplus Y \rightarrow Y$  as projeções canônicas. Como  $f'(x, y) = \partial_1 f(x, y) \circ \pi_1 + \partial_2 f(x, y) \circ \pi_2$ , obtemos que  $f'$  é contínua se  $\partial_1 f$  e  $\partial_2 f$  o são.

Quanto ao sentido ( $\Rightarrow$ ), claramente se supomos que  $f$  é de classe  $C^1$ , então existem e são contínuas  $\partial_1 f = f' \circ \pi_1$  e  $\partial_2 f = f' \circ \pi_2$ .

□

## 2.3 Sequências e séries de aplicações deriváveis

**Teorema 2.3.1.** *Sejam  $E, \hat{E}$  espaços de Banach,  $U \subset E$  um aberto e seja  $C$  um conjunto aberto convexo limitado tal que  $\overline{C} \subset U$ . Suponha que  $f_j : U \rightarrow \hat{E}$  é uma sequência de aplicações contínuas em  $U$  e deriváveis em  $C$ . Se para um certo  $a \in \overline{C}$ ,  $\exists \lim_{j \rightarrow +\infty} f_j(a) =: f(a)$  e temos que  $Df_j(x) \rightarrow_u L(x)$ ,  $\forall x \in C$ , então  $\exists f : \overline{C} \rightarrow \hat{E}$ , contínua em  $\overline{C}$  e derivável em  $C$  tal que  $f_j|_{\overline{C}} \rightarrow_u f$  e  $Df(x) = L(x)$ ,  $\forall x \in C$ .*

**Prova:** Para vermos que existe tal  $f : \overline{C} \rightarrow \hat{E}$  (pelo menos contínua) basta, em primeiro lugar, vermos que  $(f_j)$  é de Cauchy, ou seja,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists j_0$  tal que  $\sup_{x \in \overline{C}} \{\|f_m(x) - f_j(x)\|\} < \epsilon$ ,  $\forall m, j \geq j_0$ . Sejam  $m, j \in \mathbb{N}$ , inicialmente, quaisquer, e tome  $\epsilon > 0$  dado. Aplicando a desigualdade do Valor Médio a  $f_m - f_j$ , obtemos para  $x \in \overline{C}$ :

$$\|(f_m - f_j)(x) - (f_m - f_j)(a)\| \leq \sup_{y \in (a, x)} \{\|(Df_m - Df_j)(y)\|\} \cdot \|x - a\| \Rightarrow$$

$$\|f_m(x) - f_j(x)\| \leq \|(f_m - f_j)(x) - (f_m - f_j)(a)\| + \|f_m(a) - f_j(a)\| \leq \sup_{y \in (a, x)} \{\|(Df_m - Df_j)(y)\|\} \cdot \|x - a\| + \|f_m(a) - f_j(a)\|.$$

Como o segmento  $(a, x) \in C$  e  $Df_j \rightarrow_u L$ , e  $\text{diam}(\overline{C}) = \text{diam}(C) < +\infty$ , temos que existe  $j_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m, j \geq j_1$ , implica

$$\sup_{y \in (a, x)} \{\|(Df_m - Df_j)(y)\|\} \cdot \|x - a\| \leq \sup_{y \in C} \{\|(Df_m - Df_j)(y)\|\} \cdot \text{diam}(C) < \epsilon/2.$$

Como, por hipótese,  $f_j(a) \rightarrow f(a)$ , existe  $j_0 > j_1$  tal que  $\|f_m(a) - f_j(a)\| < \epsilon/2$ ,  $\forall m, j \geq j_0$ , donde concluímos que

$$\|f_m(x) - f_j(x)\| < \epsilon, \forall m, j \geq j_0, \forall x \in \overline{C}.$$

Definimos então  $f : \overline{C} \rightarrow \hat{E}$  como o limite uniforme de  $f_j|_{\overline{C}}$ .

Mostremos que  $f$  é derivável em  $C$ , com  $f'(x) = L(x)$ . Seja portanto  $x_0 \in C$  fixado. Daí,

$$\frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(x_0) \cdot h\|}{\|h\|} \leq \frac{\|f(x_0 + h) - f_j(x_0 + h) - f(x_0) + f_j(x_0)\|}{\|h\|} + \frac{\|f_j(x_0 + h) - f_j(x_0) - L(x_0) \cdot h\|}{\|h\|}. \quad (2.1)$$

Pelas mesmas contas que fizemos na primeira parte da prova, trocando  $a$  por  $x_0$ , acerca da primeira parcela acima, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\|f(x_0 + h) - f_j(x_0 + h) - f(x_0) + f_j(x_0)\|}{\|h\|} = \\ & \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\|f_m(x_0 + h) - f_j(x_0 + h) - f_m(x_0) + f_j(x_0)\|}{\|h\|} \leq \\ & \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sup_{y \in (x_0, x_0+h)} \{\|(Df_m - Df_j)(y)\|\} \cdot \|h\|}{\|h\|} = \\ & \lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{y \in (x_0, x_0+h)} \{\|(Df_m - Df_j)(y)\|\}. \end{aligned}$$

Como  $Df_j \rightarrow_u L$  em  $C$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $j_1$  tal que  $\forall j \geq j_1$ , vale

$$\sup_{y \in (x_0, x_0+h)} \{\|(Df_m - Df_j)(y)\|\} < \epsilon/3.$$

Quanto à segunda parcela da equação 2.1, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{\|f_j(x_0 + h) - f_j(x_0) - L(x_0) \cdot h\|}{\|h\|} \leq \\ & \frac{\|f_j(x_0 + h) - f_j(x_0) - Df_j(x_0) \cdot h\|}{\|h\|} + \|Df_j(x_0) - L(x_0)\|. \end{aligned}$$

Fixando um  $j > j_1$  acima, como tal  $f_j$  é derivável, existe  $\delta > 0$ , tal que  $\|h\| < \delta$ , vale

$$\frac{\|f_j(x_0 + h) - f_j(x_0) - Df_j(x_0) \cdot h\|}{\|h\|} < \epsilon/3.$$

Juntando tudo, concluímos que

$$\frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(x_0) \cdot h\|}{\|h\|} < \epsilon, \forall h \in B(0, \delta),$$

ou seja  $f$  é derivável em  $x_0 \in C$ , com  $Df(x_0) = L(x_0)$ .

□

## 2.4 Derivadas de Ordem Superior

Sejam  $E, \hat{E}$  espaços vetoriais normados,  $U \subset E$  um aberto,  $f : U \rightarrow \hat{E}$  uma aplicação derivável. Então  $f' : U \rightarrow \hat{\mathcal{L}}(E)$  é mais uma vez uma aplicação com mesmo domínio que  $f$  e contradomínio um espaço vetorial normado (o qual, por sinal, será completo se  $\hat{E}$  o for).

Desse modo, podemos perguntar se  $f'$  é uma aplicação derivável; se ela for, sua derivada será uma aplicação

$$f'' : U \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E, \hat{E})),$$

chamada de derivada segunda de  $f$ . Novamente, podemos perguntar se  $f''$  é ou não derivável. Se o for, obteremos a derivada terceira

$$f^{(3)} = (f'')' : U \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; \hat{E})))$$

Temos então:

**Definição 2.4.1.** (Derivadas de ordem superior.) Seja  $f : U \rightarrow \hat{E}$  uma aplicação derivável. Dizemos que  $f$  é  $k$  vezes diferenciável se  $f'$  for  $k - 1$  vezes diferenciável. Analogamente,  $f$  é dita  $C^0$  se for contínua, e é dita  $C^k$ ,  $k \geq 1$  se for diferenciável e  $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(E; \hat{E})$  for  $C^{k-1}$ .

Note que se os espaços  $E, \hat{E}$  têm dimensão finita, o contradomínio da  $k$ -ésima derivada possui dimensão  $\dim(E)^k \cdot \dim(\hat{E})$ .

Nosso primeiro teorema acerca de derivadas de ordem superior nos diz que a derivada segunda avaliada em qualquer ponto  $x_0 \in U$  é auto-adjunta.

**Teorema 2.4.2.** (Schwartz.) *Sejam  $E, \hat{E}$  espaços vetoriais normados,  $U \subset E$  um aberto duas vezes diferenciável.*

**Prova:**

□

**Lema 2.4.3.** *Sejam  $E, \hat{E}$  espaços vetoriais normados e  $0 \in U \subset E$  um aberto. Suponha que  $r : U \rightarrow \hat{E}$  uma aplicação  $n$  vezes derivável em  $0$ . Então*

$$r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} r(h)/\|h\|^n = 0.$$

**Prova:** ( $\Rightarrow$ ) Procedamos uma indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , a ida do lema é válida: se  $r(0) = r'(0) = 0$ , pela definição da derivada aplicada a  $r$  em 0, temos que  $r$  é igual ao próprio resto da definição, logo  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/\|h\| = 0$ .

Vamos supor agora que temos provado a ida do lema para um certo natural  $n \geq 1$ . Mostremos que se  $r$  é  $n + 1$  vezes diferenciável em 0 e  $r(0) = \dots = r^{(n+1)}(0) = 0$ , então  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/\|h\|^{n+1} = 0$ . Note que a hipótese de indução é válida para  $r'$ . Aplicando a desigualdade do Valor Médio, temos:

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|^{n+1}} = \frac{\|r(h) - r(0)\|}{\|h\|^{n+1}} \leq \sup_{t \in (0,1)} \frac{\|r'(t \cdot h)\| \cdot \|h\|}{\|h\|^{n+1}} = \sup_{t \in (0,1)} \frac{\|r'(t \cdot h)\|}{\|h\|^n}.$$

Aplicando a hipótese de indução a  $r'$ , temos que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|h\| < \delta \Rightarrow \|r'(h)\|/\|h\|^n < \epsilon/2$ . Como  $t \cdot \|h\| = \|t \cdot h\| < \|h\|$  para  $t \in (0, 1)$ , concluímos que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \frac{\|r(h)\|}{\|h\|^{n+1}} \leq \sup_{t \in (0,1)} \frac{\|r'(t \cdot h)\|}{\|h\|^n} \leq \epsilon/2 < \epsilon,$$

ou seja,  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/\|h\|^{n+1} = 0$ , o que conclui a indução.

( $\Leftarrow$ ) Vejamos agora a recíproca.

□

**Teorema 2.4.4.** (*Polinômio de Taylor.*)

**Prova:**

□

## 2.5 Exercícios

1. Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em um ponto  $c \in (a, b)$ . Suponha que  $f'(c) > 0$ . Mostre que existe um intervalo  $I_c = (c - \delta, c + \delta)$ , tal que se  $x \in (c, c + \delta)$  então  $f(x) > f(c)$  e analogamente,  $f(\hat{x}) < f(c)$  se  $c \in (c - \delta, c)$ . Note que isso não quer dizer que  $f$  seja crescente em  $(c - \delta, c + \delta)$ .
2. Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivável. Suponha que  $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ . Mostre que  $f$  é estritamente crescente. Compare com o exercício anterior.

3. Seja  $f : U \rightarrow \hat{E}$  uma aplicação definida em um aberto  $U$  de um espaço vetorial normado  $E$  e com contradomínio em um outro espaço vetorial normado  $\hat{E}$ . Suponha que exista  $c \in U$  tal que  $f$  seja derivável em  $c$  e  $f'(c) : E \rightarrow \hat{E}$  seja um isomorfismo linear. Mostre que existe uma vizinhança  $V_c \ni c$  tal que  $f(x) \neq f(c), \forall x \in V_c$ . Se  $f$  for derivável em  $U$ , com  $f'(x)$  sendo isomorfismo para todo  $x \in U$ , então  $f$  é injetiva? Compare com os exercícios anteriores.
4. Sejam  $E, \hat{E}$  espaços vetoriais normados e  $U \subset E$  um aberto,  $C \subset U$  um conjunto convexo. Suponha que  $f : U \rightarrow \hat{E}$  seja derivável, com derivada limitada em  $C$ . Mostre que podemos ter  $\text{Lip}(f|_C) < \sup_{x \in C} \{\|Df(x)\|\}$ .
5. Sejam  $E, \hat{E}$  espaços vetoriais normados e  $C \subset E$  um aberto convexo. Suponha que  $f : C \rightarrow \hat{E}$  seja derivável, com derivada limitada. Mostre que  $\text{Lip}(f) = \sup_{x \in C} \{\|Df(x)\|\}$ .
6. Seja  $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma sequência de aplicações duas vezes diferenciáveis no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , convergindo pontualmente a uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Suponha que existam  $x_0 \in U$  e  $C > 0$  tais que  $\|f_n''(x)\| < C, \forall x \in U, \forall n \in \mathbb{N}$  e  $\|f_n'(x_0)\| < C, \forall n \in \mathbb{N}$ . Mostre que  $f \in C^1$ .

## Capítulo 3

# Funções Inversas e Implícitas

**Teorema 3.0.1.** (*Perturbação da Identidade*). *Sejam  $E$  um espaço vetorial normado completo (espaço de Banach),  $I : E \rightarrow E$  a identidade em  $E$  e seja  $\Phi : E \rightarrow E$  uma contração em  $E$ . Então  $I + \Phi$  é um homeomorfismo sobre  $E$ .*

**Prova:** Sejam  $x, y \in E$  e  $h = I + \Phi$ . Seja  $0 < \lambda < 1$  a constante de Lipschitz de  $\Phi$ . Então

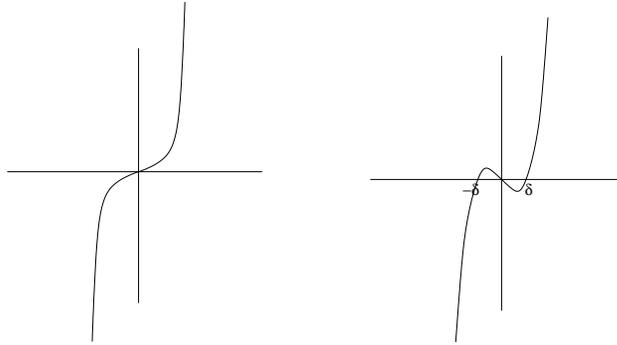
$$\begin{aligned} \|I(x) + \Phi(x) - I(y) - \Phi(y)\| &\geq \|x - y\| + \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \geq \|x - y\| - \lambda \cdot \|x - y\| = \\ &(1 - \lambda) \cdot \|x - y\| \Rightarrow \|h(x) - h(y)\| \geq (1 - \lambda) \cdot \|x - y\| \neq 0 \text{ se } x \neq y; \end{aligned}$$

donde obtemos a injetividade de  $h$ , e também a continuidade de  $h^{-1}$ . Mostremos agora a sobrejetividade de  $h$ . Seja  $z \in E$ . Queremos ver que existe  $p \in E$  tal que  $h(p) = z \Leftrightarrow p + \Phi(p) = z \Leftrightarrow p = z - \Phi(p)$ . Por conseguinte definamos  $f_z : E \rightarrow E$  por  $f_z(x) = z - \Phi(x)$ . Basta então acharmos um ponto fixo  $p$  para  $f_z$ , que teremos  $h(p) = z$ . De fato,  $f_z : E \rightarrow E$  é contração:

$$\|f_z(x) - f_z(y)\| = \|z - \Phi(x) - z + \Phi(y)\| = \|\Phi(y) - \Phi(x)\| \leq \lambda \cdot \|x - y\|.$$

Como  $E$  é espaço normado completo, segue-se do teorema do ponto fixo para contrações (teorema 1.4) que existe um único  $p \in E$  tal que  $h(p) = z$ , como queríamos. Isso nos dá ao mesmo tempo a sobrejetividade e uma nova prova da injetividade. □

**Observação 3.0.2.** É possível melhorar ainda mais a última demonstração: se  $a \in E$  e  $b = h(a)$ , mostremos que dado  $\delta > 0$ , então  $h(B(a, \delta)) \supset B(b, (1 -$



Os gráficos de  $y = x^3$  e de  $y = x^3 - \delta x^2$  nos mostram que somando-se uma contração a um homeomorfismo com inversa não lipschitziana, o resultado pode não ser um homeomorfismo. Mostra ademais que a soma de homeomorfismos pode não ser um homeomorfismo.

$\lambda) \cdot \delta$ ). De fato, vimos que dado  $z \in B(b, (1 - \lambda) \cdot \delta)$ , existe um único  $p \in E$  tal que  $h(p) = z$ . Daí,

$$\begin{aligned} \|p - a\| &= \|f_z(p) - a\| = \|z - \Phi(p) - a\| = \|z - \Phi(p) \underbrace{-a - \Phi(a)}_{-b} + \Phi(a)\| \leq \\ &\|z - b\| + \|\Phi(a) - \Phi(p)\| \leq \|z - b\| + \lambda \cdot \|p - a\| \Rightarrow \\ (1 - \lambda) \cdot \|p - a\| &\leq \|z - b\| \leq (1 - \lambda) \cdot \delta \Rightarrow \|p - a\| \leq \delta. \end{aligned}$$

Isso prova novamente a continuidade de  $h^{-1}$ . Além do mais, nos dá um controle sobre o comportamento local de  $h$ .

**Corolário 3.0.3.** (Perturbação de uma aplicação bilipschitz). *Sejam  $E, \tilde{E}$  espaços de Banach e  $\Psi : E \rightarrow \tilde{E}$  uma aplicação bilipschitz (sobrejetiva), isto é,  $f$  é invertível e lipschitziana com inversa também lipschitziana. Seja  $\Phi : E \rightarrow \tilde{E}$  Lipschitz tal que sua constante de Lipschitz  $\text{Lip}(\Phi) < \text{Lip}(\Psi^{-1})^{-1}$ . Então  $\Psi + \Phi : E \rightarrow \tilde{E}$  é um homeomorfismo (sobrejetivo).*

**Prova:** Considere  $h : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$  dado por

$$h := (\Psi + \Phi)\Psi^{-1} = I + \Phi \circ \Psi^{-1}.$$

Dados  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{E}$ ,

$$\|\Phi(\Psi^{-1}(\tilde{x})) - \Phi(\Psi^{-1}(\tilde{y}))\| \leq \text{Lip}(\Phi) \cdot \|\Psi^{-1}(\tilde{x}) - \Psi^{-1}(\tilde{y})\| \leq$$

$$\text{Lip}(\Phi) \cdot \text{Lip}(\Psi^{-1}) \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \Rightarrow \|\Phi \circ \Psi^{-1}(\tilde{x}) - \Phi \circ \Psi^{-1}(\tilde{y})\| \leq \lambda \|\tilde{x} - \tilde{y}\|,$$

ou seja,  $\Phi \circ \Psi^{-1}$  é uma  $\lambda$ -contração. Logo, pelo teorema da perturbação da identidade,  $h = (\Psi + \Phi) \circ \Psi^{-1} = I + \Phi \Psi^{-1}$  é um homeomorfismo (injetivo e sobre  $\tilde{E}$ ). Portanto a composição

$$(\Psi + \Phi)\Psi^{-1} \circ \Psi = \Psi + \Phi$$

é um homeomorfismo, como queríamos mostrar.  $\square$

**Corolário 3.0.4.** (*Perturbação do Isomorfismo*). *Sejam  $E, \tilde{E}$  espaços de Banach e  $T : E \rightarrow \tilde{E}$  um isomorfismo linear (sobrejetivo). Seja  $\Phi : E \rightarrow \tilde{E}$  Lipschitz tal que sua constante de Lipschitz  $\text{Lip}(\Phi) < \|T^{-1}\|^{-1}$ . Então  $T + \Phi : E \rightarrow \tilde{E}$  é um homeomorfismo (sobrejetivo).*

**Prova:** O corolário segue imediatamente do corolário anterior. Podemos ainda dar-lhe outra prova a partir do teorema da perturbação da identidade, adaptando a prova do Corolário anterior, conforme fazemos abaixo. A linearidade de  $T$  torna a adaptação mais simples:

Considere  $h : E \rightarrow E$  dado por

$$h := T^{-1}(T + \Phi) = I + T^{-1}\Phi.$$

Dados  $x, y \in E$ ,

$$\|T^{-1} \circ \Phi(x) - T^{-1} \circ \Phi(y)\| = \|T^{-1}(\Phi(x) - \Phi(y))\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq$$

$$\|T^{-1}\| \cdot \text{Lip}(\Phi) \cdot \|x - y\| \Rightarrow \|T^{-1}\Phi(x) - T^{-1}\Phi(y)\| \leq \lambda \|x - y\|,$$

ou seja,  $T^{-1} \circ \Phi$  é uma  $\lambda$ -contração. Logo, pelo teorema da perturbação da identidade,  $h = T^{-1}(T + \Phi) = I + T^{-1}\Phi$  é um homeomorfismo (injetivo e sobre). Portanto a composição

$$T \circ (T^{-1}(T + \Phi)) = T + \Phi$$

é um homeomorfismo, como queríamos mostrar.  $\square$

## 3.1 O teorema da Função Inversa

### 3.1.1 Funções $C^\infty$ não analíticas

**Lema 3.1.1.** *Sejam  $E, \tilde{E}$  espaços de Banach,  $f : \mathcal{N} \subset E \rightarrow \tilde{E}$  uma aplicação  $C^k$ ,  $k \geq 1$  de um aberto  $\mathcal{N} \subset E$  contendo 0, com  $f(0) = 0$  e seja  $A = Df_0$ . Denotemos por  $C_b^0(E, \tilde{E})$  o espaço das aplicações contínuas e limitadas de  $E$  em  $\tilde{E}$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe uma vizinhança  $U = U(0)$  e existe uma extensão de  $f|_U$  da forma  $(A + \phi)$ , onde  $\phi \in C_b^0(E, \tilde{E})$  é lipschitziana com constante de Lipschitz limitada por  $\epsilon$ .*

**Prova:** Seja  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  uma função  $C^\infty$  com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= 0 & \text{se } t &\geq 1 \\ \beta(t) &= 1 & \text{se } t &\leq 1/2 \\ |\beta'(t)| &\leq K, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad K > 2. \end{aligned}$$

Seja  $f = A + \varphi$ , com  $\varphi(0) = 0$  e  $D\varphi_0 = 0$ . Considere  $B_r$  uma bola de centro na origem e raio  $r > 0$  tal que  $\|D\varphi_x\| < \epsilon/2K, \forall x \in B_r$ . (Para a existência de tal bola, usamos apenas a continuidade de  $D\varphi$ , decorrente do fato de  $f$  ser  $C^1$ ).

Tomemos

$$\phi(x) := \beta\left(\frac{|x|}{r}\right) \cdot \varphi(x).$$

Daí,  $\phi(x) = 0$  se  $|x| \geq r$ , o que implica que  $\phi$  é limitada em  $E$ , visto que  $|\phi| \leq |\varphi|$ , e devido a desigualdade do valor médio, a constante de Lipschitz de  $\varphi|_{B_r}$  é menor que  $\epsilon/(2K)$ . Em resumo:

$$|\phi(x)| \leq |\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \frac{\epsilon}{2K} \cdot |x - 0| \leq \frac{\epsilon}{2K} \cdot r, \forall x \in B_r.$$

Temos ainda que  $\phi(x) = \varphi(x)$  se  $|x| \leq r/2$ , donde concluímos que  $A + \phi$  é extensão de  $f|_{B_{r/2}}$ .

Mostremos que  $\phi$  é lipschitziana e sua constante de Lipschitz pode ser tomada como menor ou igual a  $\epsilon$ .

Realmente, se  $x_1$  e  $x_2$  pertencem a  $B_r$ , temos:

$$\begin{aligned} \left| \phi(x_1) - \phi(x_2) \right| &= \left| \beta\left(\frac{|x_1|}{r}\right) \cdot \varphi(x_1) - \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right) \cdot \varphi(x_2) \right| = \\ &= \left| \left( \beta\left(\frac{|x_1|}{r}\right) - \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right) \right) \cdot \varphi(x_1) - \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right) \cdot (\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \left( \beta\left(\frac{|x_1|}{r}\right) - \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right) \right) \cdot \varphi(x_1) \right| + \underbrace{\left| \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right) \cdot (\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \right|}_{0 \leq \beta(\cdot) \leq 1} \leq \\ & K \cdot \left| \frac{|x_1| - |x_2|}{r} \right| \cdot \frac{\epsilon}{2K} \cdot |x_1| + \frac{\epsilon}{2K} \cdot |x_1 - x_2| \leq \\ & \frac{|x_1 - x_2|}{r} \cdot \frac{\epsilon}{2} \cdot r + \frac{\epsilon}{2} \cdot |x_1 - x_2| = \epsilon \cdot |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Se  $x_1 \in B_r$  e  $x_2 \notin B_r$ , obtemos, a partir das mesmas contas:

$$\begin{aligned} & \left| \phi(x_1) - \phi(x_2) \right| = \left| \beta\left(\frac{|x_1|}{r}\right) \cdot \varphi(x_1) - \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right) \cdot \varphi(x_2) \right| \leq \\ & \left| \left( \beta\left(\frac{|x_1|}{r}\right) - \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right) \right) \cdot \varphi(x_1) \right| + \underbrace{\left| \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right) \cdot (\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \right|}_{=0, \text{ pois } |x_2|/r \geq 1} \leq \\ & K \cdot \left| \frac{|x_1| - |x_2|}{r} \right| \cdot \frac{\epsilon}{2K} \cdot |x_1| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{r} \cdot \frac{\epsilon}{2} \cdot r \leq \epsilon \cdot |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Finalmente, se  $x_1 \notin B_r$  e  $x_2 \notin B_r$ , temos que

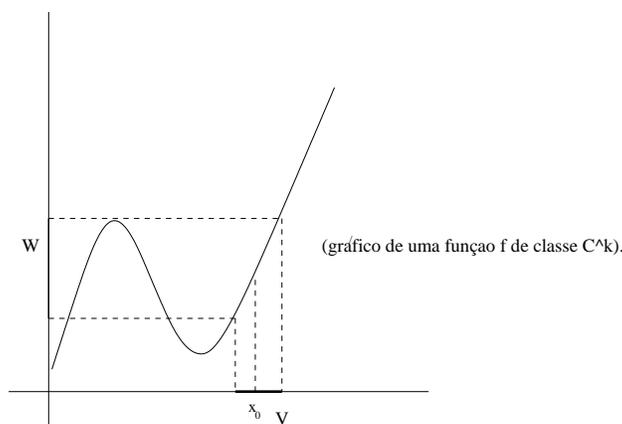
$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| = 0 \leq \epsilon \cdot |x_1 - x_2|.$$

□

**Definição 3.1.2.** (Difeomorfismo). Sejam  $E, \tilde{E}$  espaços vetoriais e sejam  $U \subset E, \tilde{U} \subset \tilde{E}$  conjuntos abertos. Uma aplicação diferenciável  $f : U \rightarrow \tilde{U}$  é dita ser um *difeomorfismo* se é invertível e sua inversa  $f^{-1} : \tilde{U} \rightarrow U$  também é diferenciável.

**Teorema 3.1.3.** (*Função inversa*). Sejam  $E, \tilde{E}$  espaços de Banach,  $U \subset E$  um aberto e  $f : U \rightarrow \tilde{E}$  uma aplicação de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), tal que em  $x_0 \in U$ ,  $f'(x_0) \in \mathcal{L}(E, \tilde{E})$  é um isomorfismo (sobrejetivo). Então existem vizinhanças  $E \supset V \ni x_0$  e  $\tilde{E} \supset \tilde{V} \ni f(x_0)$  tais que  $f|_V$  é um difeomorfismo sobre  $\tilde{V}$ , com inversa também de classe  $C^k$ .

**Prova:** Sem perda de generalidade, podemos supor  $x_0 = 0$  e  $f(0) = 0$ . Pelo último lema, existe  $\hat{f} \in \exists V \subset U, V$  aberto, tais que  $\hat{f}|_V = f$  e  $\hat{f} = A + \phi$ , onde  $A = f'(0)$  e  $\phi$  é uma aplicação limitada de  $E$  em  $\tilde{E}$  com constante de Lipschitz  $\epsilon_0 < \|A^{-1}\|^{-1}$ . Portanto, pelo teorema da perturbação



O teorema da função inversa na reta. A derivada em  $x_0$  ser isomorfismo, neste contexto, e' o mesmo que não se anular. Note que existe um aberto  $V$  em torno de  $x_0$  tal que  $f|_V$  e' invertível, mas que outras partes do domínio de  $f$  podem ser levadas em  $f(V) = W$  ou em subconjuntos de  $W$ .

do isomorfismo (corolário 3.0.4),  $\hat{f} = A + \phi$  é homeomorfismo sobrejetivo, levando conjunto aberto de  $E$  em conjunto aberto de  $\tilde{E}$ . Em particular,  $\hat{f}|_V = f|_V : V \rightarrow f(V) = W$  nos dá as vizinhanças do enunciado. e nos diz que  $f|_V$  é um homeomorfismo sobre o aberto  $W \subset \tilde{E}$ .

Seja  $g = (f|_V)^{-1} : W \rightarrow V$ . Mostremos que  $g$  é diferenciável. Nesse caso, pela regra da cadeia o único candidato possível para a derivada de  $g$  em  $y \in W$  é obtido por:

$$(f \circ g)(y) = y \Rightarrow f'(g(y)) \cdot g'(y) = Id_W \Rightarrow g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}, \text{ se } g \text{ é derivável.}$$

Considere  $g(y + k) = g(y) + (f'(g(y)))^{-1} \cdot k + r_g(k)$ , com  $y, y + k \in W$ . Se  $x \in V$ ,  $h \in E$  são tais que  $y = f(x)$  e  $y + k = f(x + h)$ , teremos

$$g(y + k) - g(y) = g(f(x + h)) - g(f(x)) = h \Rightarrow h = (f'(g(y)))^{-1} \cdot k + r_g(k).$$

Como  $f$  é homeomorfismo,  $k \rightarrow 0 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$ . Devemos mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_g(k)}{\|k\|} = 0.$$

Como  $k = f(x + h) - f(x) = f'(x) \cdot h + r_f(h)$ , temos

$$h = (f'(g(y)))^{-1} \cdot k + r_g(k) \Rightarrow \frac{r_g(k)}{\|k\|} = \frac{h}{\|k\|} - (f'(x))^{-1} \cdot \frac{f'(x) \cdot h + r_f(h)}{\|k\|} \Rightarrow$$

$$\frac{r_g(k)}{\|k\|} = -(f'(x))^{-1} \cdot \frac{r_f(h)}{\|k\|}.$$

Como  $(f'(x))^{-1}$  é aplicação linear contínua, temos que

$$\left\| \frac{r_g(k)}{\|k\|} \right\| \leq \| -(f'(x))^{-1} \| \cdot \left\| \frac{r_f(h)}{\|k\|} \right\|,$$

ou seja, basta mostrarmos que  $\frac{r_f(h)}{\|k\|} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow 0$ . Temos

$$\frac{r_f(h)}{\|k\|} = \frac{r_f(h)}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|},$$

com  $\frac{r_f(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow 0$  ( $\Leftrightarrow h \rightarrow 0$ ). Para que  $\frac{r_f(h)}{\|k\|}$  tenda a zero quando  $k \rightarrow 0$ , é suficiente que  $\frac{\|h\|}{\|k\|}$  seja limitada. De fato, da prova da proposição 2.1.11, vimos a existência de  $c > 0$  tal que

$$\|k\| = \|f(x+h) - f(x)\| \geq c \cdot \|h\| \Rightarrow \frac{\|h\|}{\|k\|} \leq \frac{1}{c},$$

e a diferenciabilidade de  $g$  se segue.

A prova de que  $g$  é de classe  $C^k$  se dá usando-se indução e os seguintes fatos:

1.  $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$ .
2.  $g \in C^0$ , já que  $f$  é um homeomorfismo.
3. A inversão de isomorfismos lineares é de classe  $C^\infty$ .

Realmente, o acima já implica que  $g' \in C^0$  e portanto que  $g \in C^1$ . Supondo por indução que  $g \in C^j$ , com  $j < k$  obtemos então  $g' \in C^j$  e logo  $g \in C^{j+1}$ , como queríamos mostrar. □

## 3.2 O teorema da Função Implícita

**Definição 3.2.1.** (Submersão). Sejam  $E, Z$ , espaços vetoriais normados completos (espaços de Banach) e  $f : U \subset E \rightarrow Z$  uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .  $f$  é dita uma *submersão* se existe uma decomposição  $E = X \oplus Y$  em subespaços fechados  $X$  e  $Y$  e  $u \in U$  tal que  $Df|_Y(u)$  é um isomorfismo sobre  $Z$ .

**Teorema 3.2.2.** (*Função implícita*). *Sejam  $X \oplus Y, Z$  espaços de Banach e seja  $f : U \subset X \oplus Y \rightarrow Z$ , com  $f \in C^k, k \geq 1$  tal que  $\partial_2 f(x_0, y_0) : Y \rightarrow Z$  seja um isomorfismo linear contínuo (sobrejetivo). Então existem abertos  $V \subset X, W \subset Y$  tais que  $x_0 \in V \subset X, y_0 \in W \subset Y$  e uma única função  $\xi : V \rightarrow W$  de classe  $C^k$  tal que*

$$f(x, \xi(x)) = z_0 = f(x_0, y_0), \forall x \in V.$$

Ademais

$$\xi'(x) = -[\partial_2 f(x, \xi(x))]^{-1} \circ \partial_1 f(x, \xi(x)).$$

**Prova:** Defina  $h : U \subset X \oplus Y \rightarrow X \times Z$  por  $h(x, y) = (x, f(x, y))$ . Daí,

$$h'(x, y) = (\pi_1, \partial_1 f(x, y) \circ \pi_1 + \partial_2 f(x, y) \circ \pi_2),$$

ou seja,

$$h'(x, y) \cdot (v, w) = (v, \partial_1 f(x, y) \cdot v + \partial_2 f(x, y) \cdot w).$$

A inversa  $\Phi : X \times Z \rightarrow X \oplus Y$  de  $h'(x_0, y_0)$  é portanto

$$\Phi(p, q) = (p, [\partial_2 f(x_0, y_0)]^{-1} \cdot (q - \partial_1 f(x_0, y_0) \cdot p)).$$

Portanto, pelo teorema da função inversa,  $h$  é um difeomorfismo local de classe  $C^k$ . Restrinjamos  $h$  a uma vizinhança  $N$  tal que  $h(N)$  seja da forma  $\hat{V} \times \tilde{V}$ , com  $\hat{V} \subset X$  e  $\tilde{V} \subset Z$ . Chamemos ainda de  $h$  a essa restrição, e de  $h^{-1} : \hat{V} \times \tilde{V} \rightarrow N$  sua inversa. Como  $h$  preserva a coordenada em  $X$ , para cada  $x \in \hat{V}, z \in \tilde{V}$ , temos

$$h^{-1}(x, z) = (x, h_2^{-1}(x, z)).$$

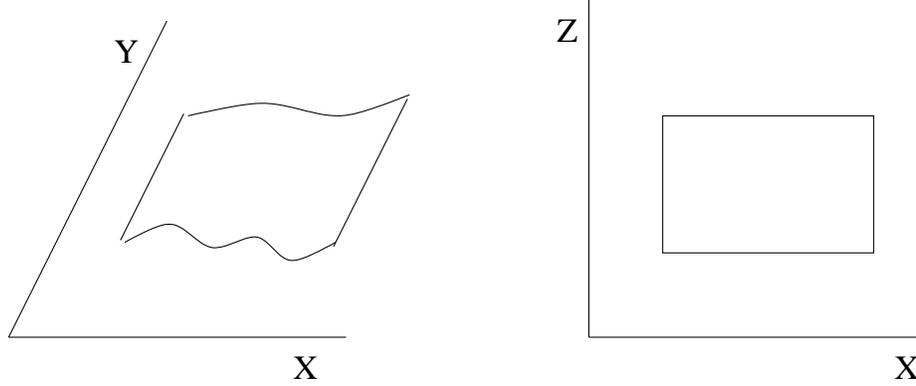
Definamos  $\xi(x) := h_2^{-1}(x, z_0)$ . Claramente  $\xi$  é de classe  $C^k$  pois é composta de funções de classe  $C^k$ . Da definição de  $\xi$  também se segue:

$$f(x, \xi(x)) = \pi_2 \circ h(x, \xi(x)) = \pi_2 \circ h \circ h^{-1}(x, z_0) = z_0.$$

Além disso, se  $f(x, y) = z_0$ , então

$$(x, y) = h^{-1} \circ (x, f(x, y)) = h^{-1}(x, z_0) = (x, h_2^{-1}(x, z_0)) = (x, \xi(x)),$$

o que implica que  $y = \xi(x)$  e portanto  $\xi(x)$  é único. Tal mostra ainda que  $\xi$  é a única função com gráfico contido em  $N$  tal que  $f(x, \xi(x)) = z_0$ . Em



particular, qualquer aplicação contínua  $\varsigma$  definida em uma vizinhança de  $x_0$ , tal que  $\varsigma(x_0) = y_0$  e  $f(x, \varsigma(x)) = z_0$  coincide (localmente, em vizinhança de  $x_0$  onde ambas estiverem definidas) com  $\xi$ . Tomando  $W \subset Y$  tal que  $(x_0, W) := \{(x_0, y) \in N\}$  da continuidade de  $\xi$  restringindo  $\hat{V}$  a uma vizinhança  $V \ni x_0$  se necessário de modo a que  $\xi(V) \subset W$ , obtemos as vizinhanças do enunciado.

Como  $\xi$  é de classe  $C^k$  aplicando a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} f(x, \xi(x)) = z_0 &\Rightarrow \partial_1 f(x, \xi(x)) + \partial_2 f(x, \xi(x)) \cdot \xi'(x) = 0 \Rightarrow \\ \xi'(x) &= -[\partial_2 f(x, \xi(x))]^{-1} \circ \partial_1 f(x, \xi(x)). \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.2.3.** (*Forma local das Submersões*). *Sejam  $X, Y, Z$  espaços de Banach,  $U \subset X \oplus Y$  um aberto,  $f : U \rightarrow Z$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Suponha que  $\exists(x_0, y_0) \in X \oplus Y$  tal que  $\partial_2 f(x_0, y_0) : Y \rightarrow Z$  seja um isomorfismo (sobrejetivo). Então existem vizinhanças  $\hat{V} \subset X$  e  $\tilde{V} \subset Z$  e um difeomorfismo  $H : \hat{V} \times \tilde{V} \rightarrow X \oplus Y$  tal que  $x_0 \in \hat{V}$ ,  $f(x_0, y_0) \in \tilde{V}$  e*

$$f \circ H(x, z) = z, \forall (x, z) \in \hat{V} \times \tilde{V}.$$

**Prova:** Tome  $\hat{V}, \tilde{V}$  como no teorema da função implícita,  $H = h^{-1}$  definida em  $\hat{V} \times \tilde{V} \subset X \times Z$ . Daí,

$$\begin{aligned} (x, z) = h \circ H(x, z) &= h(x, h_2^{-1}(x, z)) = (x, f(x, h_2^{-1}(x, z))) = \\ &= (x, f(H(x, z))) \Rightarrow z = f \circ H(x, z). \end{aligned}$$

□

**Definição 3.2.4.** (Imersão). Sejam  $X, Y, Z$ , espaços de Banach e  $f : U \subset X \rightarrow Y \oplus Z$  uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .  $f$  é dita uma *imersão* em  $x_0 \in U$  se  $Df(x_0)$  é um isomorfismo sobre  $Y$ .

**Teorema 3.2.5.** (Forma local das Imersões). Sejam  $X, Y, Z$ , espaços de Banach e  $f : U \subset X \rightarrow Y \oplus Z$  uma imersão de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , em  $x_0 \in U$ . Então existem vizinhanças  $W \subset Y \oplus Z$  e  $V \subset X$  e um difeomorfismo  $h : W \subset Y \oplus Z \rightarrow V \times Z$  de classe  $C^k$  tais que  $(f(x_0), 0) \in W$  e

$$(h \circ f)(x) = (x, 0), \quad \forall x \in V.$$

**Prova:** Considere  $H : U \times Z \rightarrow Y \oplus Z$  definido por

$$H(x, z) := f(x) + z.$$

Logo, para  $(x, z) \in U \times Z$ :

$$\begin{cases} \partial_1 H(x, z) = df(x, y) : X \rightarrow Y \oplus Z \\ \partial_2 H(x, z) = I_Z : \{0\} \times Z \rightarrow Z \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\partial_1 H, \partial_2 H \in C^0} DH = df + \pi_Z,$$

onde  $\pi_Z$  é a projeção canônica sobre  $Z$  (dada por  $X \times Z \ni (x, z) \mapsto z$ ). Por conseguinte,

$$DH(x_0, 0) \cdot = (df(x_0, 0), I_Z),$$

a qual é um isomorfismo entre  $X \times Z$  e  $Y \times Z$ . Como  $DH$  é invertível em  $(x_0, 0)$  e é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , pelo teorema da função inversa,  $H$  é um difeomorfismo local de um aberto  $V \times \hat{V}$  sobre um aberto  $W \subset Y \oplus Z$ . Tomando  $h = H^{-1}$ , temos

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(f(x) + 0) = h(H(x, 0)) = (x, 0).$$

□

**Definição 3.2.6.** (Mergulho). Se  $f$  é uma imersão e um homeomorfismo sobre sua imagem, dizemos que  $f$  é um *mergulho*.

Note que o teorema da forma local das imersões nos diz que toda imersão  $f$  é localmente um mergulho. Para isso, basta ver que  $(h \circ f)(x)$ , sendo localmente igual a  $(x, 0)$ , é (localmente) um homeomorfismo. Como  $f$  é (localmente) igual a  $H \circ (h \circ f)$ , temos que  $f$  é localmente um homeomorfismo, como composta de homeomorfismos.

**Definição 3.2.7.** (Posto de uma aplicação linear). O *posto* de uma aplicação linear  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a dimensão do espaço  $T \cdot \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ , isto é, o número máximo de vetores linearmente independentes dentre  $T \cdot v_1, \dots, T \cdot v_m$ , onde  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^m$ .

**Teorema 3.2.8.** (do posto) Sejam  $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$  uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Suponha que  $Df(u)$  possua posto  $m$  em cada ponto  $u \in U$ . Então, para cada ponto  $u \in U$ , existem difeomorfismos de classe  $C^k$   $\alpha : V \times W \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow U$  e  $\beta : V_{f(u)} \rightarrow V \times W' \subset \mathbb{R}^{m+p}$ , onde  $V_{f(u)}$  é uma vizinhança de  $f(u)$ , tais que

$$\beta \circ f \circ \alpha(x, y) = (x, 0).$$

**Prova:** Seja  $u_0 \in U$  fixado. Seja  $E = df(u_0) \cdot \mathbb{R}^{m+n} \subset \mathbb{R}^{m+p}$ . Sem perda de generalidade, identifique  $E$  com  $\mathbb{R}^m$ , fixando no contradomínio, por exemplo, a decomposição  $\mathbb{R}^{m+p} = E \oplus E^\perp$ . Seja  $\pi : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow E$  a projeção canônica, obviamente sobrejetiva, e considere a aplicação  $\pi \circ f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow E \cong \mathbb{R}^m$ . Daí, pela regra da cadeia, temos:

$$D(\pi \circ f)(u) = \pi \cdot df(u) \Rightarrow D(\pi \circ f)(u_0) \cdot \mathbb{R}^{m+n} = \pi \cdot E = E;$$

ou seja,  $\pi \cdot df(u_0)$  é sobrejetiva e logo  $\pi \circ f$  é submersão. Logo, pela Forma local da Submersões, existe um difeomorfismo  $\alpha$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  de um aberto  $V \times W \subset \mathbb{R}^{m+n}$  sobre uma vizinhança de  $f(u_0)$  tal que

$$(\pi \circ f) \circ \alpha(x, y) = x \Rightarrow f \circ \alpha(x, y) = (x, \lambda(x, y)),$$

com  $\lambda \in C^k$ . Afirmamos que  $\partial_2 \lambda \equiv 0$ . Realmente, as derivadas parciais de  $f \circ \alpha$  nos dão em  $(x, y) \in V \times W$ :

$$(f \circ \alpha)' \cdot (h, k) = h + \partial_1 \lambda(x, y) \cdot h + \partial_2 \lambda(x, y) \cdot k, \forall (h, k) \in \mathbb{R}^{m+n}.$$

Seja  $E_{x,y} = (f \circ \alpha)'(x, y) \cdot \mathbb{R}^{m+n}$ . Como  $\pi \circ f$  é submersão, temos  $\pi(E_{x,y}) = E \cong \mathbb{R}^m$ . Se em algum ponto  $(x, y)$  temos  $\partial_2 \lambda(x, y) \neq 0$ , existe  $k \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\partial_2 \lambda(x, y) \cdot k \neq 0$ , logo teríamos  $(f \circ \alpha)' \cdot (0, k) = (0, \partial_2 \lambda(x, y) \cdot k) \in E_{x,y}$ . Como  $\pi : E_{x,y} \rightarrow E$  é isomorfismo, temos nesse caso que existiria  $0 \neq v = (0, \partial_2 \lambda(x, y) \cdot k) \in E_{x,y}$  tal que  $\pi(v) = 0 \in E$ , absurdo. Por conseguinte,  $\partial_2 \lambda(x, y) = 0, \forall (x, y) \in V \times W$ . Reduzindo-se vizinhanças se necessário, podemos supor que  $W$  é convexo, o que pela desigualdade do Valor Médio implica que  $\lambda$  não depende de  $y$  (exercício). Logo,  $(f \circ \alpha)(x, y) =$

$(x, \lambda(x, y(x)))$ . Dado  $y_0 \in W$ , tomando  $i_0 : V \rightarrow V \times W$  a inclusão que leva  $V$  em  $(V, y_0)$ , obtemos que  $f \circ \alpha \circ i_0 : V \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$  dada por

$$f \circ \alpha \circ i_0(x) = (x, \lambda(x, y_0))$$

é uma imersão (a primeira coordenada já nos dá a injetividade da derivada). Logo, existe um difeomorfismo  $\beta$  de classe  $C^k$  de uma vizinhança de  $f(u)$  em uma vizinhança de  $\mathbb{R}^{m+p}$  tal que

$$\beta \circ f \circ \alpha \circ i_0(x) = (x, 0) \Rightarrow \beta \circ \underbrace{f \circ \alpha(x, y_0)}_{=f \circ \alpha(x, y)} = (x, 0) \Rightarrow \beta \circ f \circ \alpha(x, y) = (x, 0).$$

□

### 3.3 Exercícios

1. Seja  $p$  um polinômio de grau menor ou igual a  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n$  raízes distintas  $(r_1(p), \dots, r_n(p))$ . Usando do isomorfismo existente entre o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a  $n$ , e o espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$ , mostre que existe uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$  do vetor de coeficientes  $(a_0(p), \dots, a_n(p))$  de  $p$  tal que  $a_n(\hat{p}) \neq 0, \forall \hat{p} \in V$  e a aplicação  $r : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  que associa (coeficientes de) polinômios a raízes

$$r(a_0(\hat{p}), \dots, a_n(\hat{p})) = (r_1(\hat{p}), \dots, r_n(\hat{p}))$$

é de classe  $C^\infty$ .

2. Seja  $E$  um espaço de Fréchet (veja a definição no exercício 9 da página 61) e seja  $\Phi : E \rightarrow E$  uma contração. Mostre que  $h := I + \Phi$ , onde  $I$  é a identidade, é um homeomorfismo de  $E$  sobre  $E$ .

# Capítulo 4

## A Integral de Riemann em Espaços de Banach

**Definição 4.0.1.** (Partição de um intervalo). Uma *partição*  $\mathcal{P}$  de um intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  é uma coleção finita  $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_j\}$  de intervalos dois a dois disjuntos tais que  $I_1 = [x_0, x_1), \dots, I_{j-1} = [x_{j-2}, x_{j-1}), I_j = [x_{j-1}, x_j]$ , com  $x_0 = a, x_j = b$  e  $x_0 \leq \dots \leq x_j$ . Note que uma partição  $\mathcal{P}$  de um intervalo  $[a, b]$  fica inteiramente determinada pelo conjunto dos pontos  $A_{\mathcal{P}} := \{a = x_0, \dots, x_j = b\}$ , o qual designaremos por conjunto dos pontos associados a  $\mathcal{P}$ .

**Definição 4.0.2.** (Partição de um retângulo). Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  um retângulo compacto  $K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . Uma *partição*  $\mathcal{C}$  de  $K$  é qualquer coleção do tipo:

$$\mathcal{C} := \{I_{k_1} \times \dots \times I_{k_n}; I_{k_1} \in \mathcal{P}_1, \dots, I_{k_n} \in \mathcal{P}_n\},$$

onde  $\mathcal{P}_m$  é uma partição de  $[a_m, b_m]$ ,  $\forall m = 1, \dots, n$ .

As partições  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$  são ditas associadas a  $\mathcal{C}$ . Note que  $\#\mathcal{C} = \#\mathcal{P}_1 \cdot \dots \cdot \#\mathcal{P}_n$ .

**Definição 4.0.3.** (Diâmetro de uma partição). O *diâmetro de uma partição*  $\mathcal{C}$  de um retângulo  $K$  é o máximo dos diâmetros dos elementos de  $\mathcal{C}$ .

**Definição 4.0.4.** (Volume de um retângulo). Seja  $\mathcal{K} := \{K \in \mathbb{R}^n, K \text{ é retângulo}\}$ . Definimos função volume  $\text{vol}_n : \mathcal{K} \rightarrow [0, +\infty)$  pela fórmula

$$\text{vol}_n(K) := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j),$$

onde  $K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ . Caso  $K$  seja um retângulo (limitado) não compacto (ou seja, um produto cartesiano de  $n$  intervalos da reta, não necessariamente fechados) definimos o volume de  $K$  pela mesma fórmula acima. Ou seja, o volume de um retângulo não compacto é definido como o volume de seu fecho.

**Observação 4.0.5.** Note que o volume do retângulo  $n$ -dimensional  $K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  se escreve (indutivamente) como um produto de volumes de retângulos em espaços de dimensão menor:

$$\text{vol}_n(K) = \text{vol}_{n-1}([a_1, b_1] \times \cdots [a_{n-1}, b_{n-1}]) \cdot \text{vol}_1([a_n, b_n]).$$

Não havendo ambiguidade, escreveremos em geral  $\text{vol}$  no lugar de  $\text{vol}_n$  para designar a função que atribui a cada retângulo de  $\mathbb{R}^n$  o seu volume.

**Definição 4.0.6.** (Integral de Riemann). Seja  $f : K \rightarrow E$  uma aplicação limitada tomando valores em um espaço de Banach  $E$ . A integral de Riemann  $\int_K f(x)dx \in E$ , se existir, é o limite

$$\int_K f(x)dx := \lim_{\text{diam}(\mathcal{C}) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} f(x_j) \cdot \text{vol}(C_j),$$

onde  $x_j \in C_j$  e  $\mathcal{C} = \{C_j, j = 1, \dots, \#\mathcal{C}\}$ . Mais precisamente, dizer que existe o limite “ $\lim_{\text{diam}(\mathcal{C}) \rightarrow 0}$ ”, quer dizer que, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que, para toda partição de  $K$  com  $\text{diam}(\mathcal{C}) < \delta$ , e para todo conjunto finito  $\{x_1, \dots, x_{\#\mathcal{C}}\}$ , com  $x_j \in C_j$ , temos

$$\left\| \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} f(x_j) \cdot \text{vol}(C_j) - \int_K f(x)dx \right\| < \epsilon.$$

Se existir a integral de Riemann de uma aplicação  $f$ , então dizemos que  $f$  é *integrável à Riemann*, ou simplesmente, *integrável*. Uma soma do tipo  $\sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} f(x_j) \cdot \text{vol}(C_j)$ , com  $x_j \in C_j$  e  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{\#\mathcal{C}}\}$  é chamada de *soma de Riemann de  $f$  em relação a  $\mathcal{C}$* , e denotada por  $s(f, \mathcal{C})$ , ou apenas, por  $s(\mathcal{C})$  nos contextos em que  $f$  puder ser subentendida sem ambiguidades.

**Definição 4.0.7.** (Refinamento de uma partição). Seja  $\mathcal{C}$  uma partição de um retângulo  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Uma partição  $\hat{\mathcal{C}}$  de  $K$  é dita ser um *refinamento de  $\mathcal{C}$*  se todo elemento de  $\hat{\mathcal{C}}$  estiver contido em algum elemento de  $\mathcal{C}$ . Também escrevemos que  $\hat{\mathcal{C}}$  *refina  $\mathcal{C}$*  significando o mesmo que  $\hat{\mathcal{C}}$  é *refinamento de  $\mathcal{C}$* .

**Observação 4.0.8.** Dizer que  $\hat{\mathcal{C}}$  é refinamento de  $\mathcal{C}$  é o mesmo que dizer que todo elemento de  $\mathcal{C}$  se escreve como união (disjunta) de elementos de  $\hat{\mathcal{C}}$ . De fato, dado  $C_j \in \mathcal{C}$ , temos:

$$K = \cup_{\hat{C}_l \in \hat{\mathcal{C}}} \hat{C}_l \supset C_j \Rightarrow \cup_{\hat{C}_l \in \hat{\mathcal{C}}, \hat{C}_l \cap C_j \neq \emptyset} \hat{C}_l \supset C_j.$$

Mas como  $\hat{\mathcal{C}}$  refina  $\mathcal{C}$ , temos em particular que fixado  $\hat{C}_l \in \hat{\mathcal{C}}$  tal que  $\hat{C}_l \cap C_j \neq \emptyset$ , existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $\hat{C}_l \subset C_i \in \mathcal{C}$ , implicando que  $C_i \cap C_j \neq \emptyset$  e portanto que  $C_j = C_i \supset \hat{C}_l$ . Por conseguinte,

$$\cup_{\hat{C}_l \in \hat{\mathcal{C}}, \hat{C}_l \cap C_j \neq \emptyset} C_l \subset C_j,$$

concluindo a prova da observação.

**Observação 4.0.9.** Dadas duas partições  $\mathcal{C}$  e  $\hat{\mathcal{C}}$  de um retângulo  $K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ , existe uma partição  $\tilde{\mathcal{C}}$  que refina ambas  $\mathcal{C}$  e  $\hat{\mathcal{C}}$ . De fato, sejam  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$  partições respectivamente de  $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$  associadas a  $\mathcal{C}$ . Analogamente, denotemos por  $\hat{\mathcal{P}}_1, \dots, \hat{\mathcal{P}}_n$  as partições associadas a  $\hat{\mathcal{C}}$  (vide a definição de partição de um retângulo, mais acima). Ponha  $\tilde{A}_1 := (A_{\mathcal{P}_1} \cup A_{\hat{\mathcal{P}}_1}), \dots, \tilde{A}_n := (A_{\mathcal{P}_n} \cup A_{\hat{\mathcal{P}}_n})$ . Daí, para cada  $j = 1, \dots, n$  defina a partição  $\tilde{\mathcal{P}}_j$  de  $[a_j, b_j]$ , cujo conjunto de pontos associados é  $\tilde{A}_j$ . Finalmente, definimos

$$\tilde{\mathcal{C}} := \{\tilde{I}_{k_1} \times \cdots \times \tilde{I}_{k_n}; \tilde{I}_{k_1} \in \tilde{\mathcal{P}}_1, \dots, \tilde{I}_{k_n} \in \tilde{\mathcal{P}}_n\}.$$

É fácil ver que  $\tilde{\mathcal{C}}$  refina  $\mathcal{C}$  e  $\hat{\mathcal{C}}$ .

**Lema 4.0.10.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma partição de um retângulo  $K$ . Então  $\text{vol}(K) = \sum_{C_j \in \mathcal{C}} \text{vol}(C_j)$ .*

**Prova:** Usemos da observação 4.0.5 para proceder uma indução sobre  $n$ , onde  $n$  é a dimensão do retângulo  $K$ . Para  $n = 1$ , temos  $K = [a_1, b_1]$  e  $\mathcal{C} := \mathcal{P}_1 = \{I_1 = [x_0, x_1), \dots, I_k = [x_{k-1}, x_k], \text{ com } x_0 = a_1; x_k = b_1\}$ . Daí,

$$\text{vol}([a_1, b_1]) = b_1 - a_1 = \sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^k \text{vol}(I_j).$$

Agora, vamos supor por indução que tenhamos provado para um certo  $n \in \mathbb{N}$  que para toda partição  $\mathcal{C}$  de um retângulo  $\hat{K} \subset \mathbb{R}^n$ , temos  $\text{vol}_n(\hat{K}) =$

$\sum_{\hat{C}_j \in \mathcal{C}} \text{vol}(\hat{C}_j)$ . Mostremos que isso implica que dado um retângulo  $\hat{K} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  em uma sua partição  $\mathcal{C}$ , temos  $\text{vol}_{n+1}(K) = \sum_{C_j \in \mathcal{C}} \text{vol}(C_j)$ . Seja  $\mathcal{C} := \{I_{k_1} \times \cdots \times I_{k_n} \times I_{k_{n+1}}, I_{k_1} \in \mathcal{P}_1, \dots, I_{k_{n+1}} \in \mathcal{P}_{n+1}\}$ , onde  $K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n+1}, b_{n+1}]$  e  $\mathcal{P}_j, j = 1, \dots, n+1$  são as partições respectivamente de  $[a_j, b_j], j = 1, \dots, n+1$  associadas a  $\mathcal{C}$ . Temos então que

$$\sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} \text{vol}_{n+1}(C_j) = \sum_{k_1=1}^{\#\mathcal{P}_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{\#\mathcal{P}_n} \sum_{k_{n+1}=1}^{\#\mathcal{P}_{n+1}} \text{vol}_{n+1}(I_{k_1} \times \cdots \times I_{k_n} \times I_{k_{n+1}}) =$$

(pela observação 4.0.5)

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=1}^{\#\mathcal{P}_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{\#\mathcal{P}_n} \sum_{k_{n+1}=1}^{\#\mathcal{P}_{n+1}} \text{vol}_n(I_{k_1} \times \cdots \times I_{k_n}) \cdot \text{vol}_1(I_{k_{n+1}}) = \\ & \sum_{k_1=1}^{\#\mathcal{P}_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{\#\mathcal{P}_n} \text{vol}_n(I_{k_1} \times \cdots \times I_{k_n}) \cdot \sum_{k_{n+1}=1}^{\#\mathcal{P}_{n+1}} \text{vol}_1(I_{k_{n+1}}) = \end{aligned}$$

(pelo caso  $n = 1$ )

$$\left( \sum_{k_1=1}^{\#\mathcal{P}_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{\#\mathcal{P}_n} \text{vol}_n(I_{k_1} \times \cdots \times I_{k_n}) \right) \cdot \text{vol}_1([a_{n+1}, b_{n+1}]) =$$

(pela hipótese de indução, aplicada ao retângulo  $[a_1, b_1] \cdots \times \cdots [a_n, b_n]$  e sua partição associada a  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ )

$$\text{vol}_n([a_1, b_1] \cdots \times \cdots [a_n, b_n]) \cdot \text{vol}_1([a_{n+1}, b_{n+1}]) = \text{vol}(K).$$

□

**Proposição 4.0.11.** *Sejam  $K$  um retângulo compacto,  $E$  um espaço de Banach e  $f : K \rightarrow E$  uma aplicação contínua. Então  $\exists \int_K f(x)dx \in E$ .*

**Prova:** Como  $f$  é contínua em  $K$  compacto, é uniformemente contínua. Seja  $\epsilon > 0$  e tome  $\delta > 0$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| < \epsilon / (2 \text{vol}(K)), \forall x, y \in K, d(x, y) < \delta.$$

Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\hat{\mathcal{C}}$  partições quaisquer, com  $\text{diam}(\mathcal{C}) < \delta$  e  $\text{diam}(\hat{\mathcal{C}}) < \delta$ . Seja  $\tilde{\mathcal{C}}$  uma partição que refina tanto  $\mathcal{C}$  como  $\hat{\mathcal{C}}$  (tal partição existe, pela observação 4.0.9). Daí, comparando somas de Riemann em  $\mathcal{C}$  e  $\tilde{\mathcal{C}}$ , obtemos:

$$\|s(\mathcal{C}) - s(\tilde{\mathcal{C}})\| = \left\| \sum_j^{\#\mathcal{C}} f(x_j) \cdot \text{vol}(C_j) - \sum_j^{\#\tilde{\mathcal{C}}} f(\tilde{x}_j) \cdot \text{vol}(\tilde{C}_j) \right\|.$$

Para cada  $C_j \in \mathcal{C}$ , tomemos  $\tilde{C}_{j,1}, \dots, \tilde{C}_{j,r(j)} \in \tilde{\mathcal{C}}$  tais que  $C_j = \dot{\cup}_{i=1}^{r(j)} \tilde{C}_{j,i}$ . Por conseguinte, reenumerando a soma de Riemann em  $\tilde{\mathcal{C}}$ , chegamos a

$$\begin{aligned} \|s(\mathcal{C}) - s(\tilde{\mathcal{C}})\| &= \left\| \sum_j^{\#\mathcal{C}} f(x_j) \cdot \text{vol}(C_j) - \sum_j^{\#\mathcal{C}} \left( \sum_{i=1}^{r(j)} f(\tilde{x}_{j,i}) \cdot \text{vol}(\tilde{C}_{j,i}) \right) \right\| \leq \\ & \sum_j^{\#\mathcal{C}} \left\| f(x_j) \cdot \text{vol}(C_j) - \sum_{i=1}^{r(j)} f(\tilde{x}_{j,i}) \cdot \text{vol}(\tilde{C}_{j,i}) \right\| = \\ & \sum_j^{\#\mathcal{C}} \left\| \sum_{i=1}^{r(j)} (f(x_j) - f(\tilde{x}_{j,i})) \cdot \text{vol}(\tilde{C}_{j,i}) \right\| \leq \\ & \sum_j^{\#\mathcal{C}} \sum_{i=1}^{r(j)} \|f(x_j) - f(\tilde{x}_{j,i})\| \cdot \text{vol}(\tilde{C}_{j,i}) \leq \\ & \frac{\epsilon}{2 \text{vol}(K)} \cdot \sum_j^{\#\mathcal{C}} \sum_{i=1}^{r(j)} \text{vol}(\tilde{C}_{j,i}) = \epsilon/2. \end{aligned}$$

Trocando  $\mathcal{C}$  por  $\hat{\mathcal{C}}$  nas contas acima, temos que  $\|s(\hat{\mathcal{C}}) - s(\tilde{\mathcal{C}})\| < \epsilon/2$ , logo

$$\|s(\mathcal{C}) - s(\hat{\mathcal{C}})\| \leq \|s(\mathcal{C}) - s(\tilde{\mathcal{C}})\| + \|s(\tilde{\mathcal{C}}) - s(\hat{\mathcal{C}})\| < \epsilon,$$

implicando que  $f$  é integrável. □

**Proposição 4.0.12.** (*Linearidade da Integral*). *Sejam  $K \subset \mathbb{R}^n$  um retângulo compacto,  $E$  um espaço de Banach,  $c \in \mathbb{R}$  e  $f, g : K \rightarrow E$  duas aplicações integráveis. Então, a aplicação  $h := f + cg$  é integrável e vale*

$$\int_K (f + cg)(x) dx = \int_K f(x) dx + c \cdot \int_K g(x) dx$$

**Prova:** Seja  $\epsilon > 0$  dado. Como  $f$  e  $g$  são integráveis, tome  $\delta > 0$  de modo que, para qualquer partição  $\mathcal{C}$  de  $K$ , com  $\text{diam}(\mathcal{C}) < \delta$ , valham as desigualdades:

$$\left\| \int_K f(x)dx - s(f, \mathcal{C}) \right\| < \epsilon/2, \left\| \int_K g(x)dx - s(g, \mathcal{C}) \right\| < \epsilon/2|c|;$$

onde  $s(f, \mathcal{C})$  e  $s(g, \mathcal{C})$  são somas de Riemann quaisquer em relação à partição  $\mathcal{C}$ , respectivamente, de  $f$  e  $g$ . Considere agora uma soma de Riemann qualquer de  $h$  em relação a  $\mathcal{C}$ , digamos,

$$s(h, \mathcal{C}) = s(f + cg, \mathcal{C}) = \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} (f + cg)(x_j) \cdot \text{vol}(C_j),$$

com  $x_j \in C_j$  e  $\mathcal{C} = \{C_j, j = 1, \dots, \#\mathcal{C}\}$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} s(h, \mathcal{C}) &= \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} (f + cg)(x_j) \cdot \text{vol}(C_j) = \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} (f(x_j) + cg(x_j)) \cdot \text{vol}(C_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} f(x_j) \cdot \text{vol}(C_j) + c \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} g(x_j) \cdot \text{vol}(C_j) = s(f, \mathcal{C}) + cs(g, \mathcal{C}), \end{aligned}$$

ou seja, a soma de Riemann (arbitrária) de  $h$  com respeito a  $\mathcal{C}$  se escrever como combinação linear de somas de Riemann (específicas) de  $f$  e  $g$  também em relação a  $\mathcal{C}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \left\| s(h, \mathcal{C}) - \int_K f(x)dx - c \int_K g(x)dx \right\| &= \left\| s(f, \mathcal{C}) + c \cdot s(g, \mathcal{C}) - \int_K f(x)dx - c \int_K g(x)dx \right\| \leq \\ &= \left\| s(f, \mathcal{C}) - \int_K f(x)dx \right\| + |c| \left\| s(g, \mathcal{C}) - \int_K g(x)dx \right\| < \epsilon/2 + |c|\epsilon/2|c| = \epsilon, \end{aligned}$$

o que implica que  $h = f + cg$  é integrável e

$$\int_K h(x)dx = \lim_{\text{diam}(\mathcal{C}) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} (f + cg)(x_j) \cdot \text{vol}(C_j) = \int_K f(x)dx + c \int_K g(x)dx.$$

□

**Lema 4.0.13.** *Sejam  $K, K_1, \dots, K_r \subset \mathbb{R}^n$  retângulos compactos tais que  $\cup_{j=1}^r K_j \subset K$ . Então existe uma partição  $\mathcal{C}$  de  $K$  tal que qualquer retângulo  $K_j, j = 1, \dots, r$  se escreve como união de fecho de elementos de  $\mathcal{C}$ .*

**Prova:** Para cada  $j \in \{1, \dots, r\}$ , escreva

$$K_j =: [a_{j,1}, b_{j,1}] \times \cdots \times [a_{j,n}, b_{j,n}]$$

e escreva ainda

$$K =: [a_{0,1}, b_{0,1}] \times \cdots \times [a_{0,n}, b_{0,n}].$$

Dado  $1 \leq m \leq n$ , seja

$$C_m := \{c_{k,m} : 0 \leq k \leq 2(r+1), c_{k,m} = a_{j,m} \text{ ou } b_{j,m}, \text{ para algum } 0 \leq j \leq r\}.$$

Supomos, sem perda, que  $C_m$  está ordenado de modo a que  $c_{k,m} < c_{k+1,m}$ . Definimos portanto

$$\mathcal{C} := \{[c_{k_1,1}, c_{k_1+1,1}] \times \cdots \times [c_{k_n,n}, c_{k_n+1,n}], \text{ com } 0 \leq k_l < 2(r+1), 0 \leq l \leq n\}.$$

Para vermos que qualquer retângulo do enunciado pode ser expresso com a união de retângulos de  $\mathcal{C}$ , basta vermos que  $K \subset \cup_{C \in \mathcal{C}} C$ , e que dado um elemento de  $C \in \mathcal{C}$ , se ele intersecta o interior de algum retângulo  $K_j, 1 \leq j \leq r$ , então ele está contido em  $K_j$ . Que temos  $K \subset \cup_{C \in \mathcal{C}} C$  é óbvio: se  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$ , então

$$x_1 \in [a_{0,1}, b_{0,1}] = \cup_{j=0}^{2(r+1)-1} [c_{j,1}, c_{j+1,1}] \Rightarrow \exists k_1 \text{ tal que } x_1 \in [c_{k_1,1}, c_{k_1+1,1}],$$

⋮

$$x_n \in [a_{0,n}, b_{0,n}] = \cup_{j=0}^{2(r+1)-1} [c_{j,n}, c_{j+1,n}] \Rightarrow \exists k_n \text{ tal que } x_n \in [c_{k_n,1}, c_{k_n+1,1}];$$

ou seja,  $x \in [c_{k_1,1}, c_{k_1+1,1}] \times \cdots \times [c_{k_n,1}, c_{k_n+1,1}] \in \mathcal{C}$ .

Por outro lado, se um elemento  $[c_{k_1,1}, c_{k_1+1,1}] \times \cdots \times [c_{k_n,1}, c_{k_n+1,1}] \in \mathcal{C}$  intersecta o interior de um dos retângulos do enunciado, digamos,  $K_j = [a_{j,1}, b_{j,1}] \times \cdots \times [a_{j,n}, b_{j,n}]$ . Isso quer dizer que existe

$$x \in [c_{k_1,1}, c_{k_1+1,1}] \times \cdots \times [c_{k_n,1}, c_{k_n+1,1}] \cap (a_{j,1}, b_{j,1}) \times \cdots \times (a_{j,n}, b_{j,n}) = \\ \left( [c_{k_1,1}, c_{k_1+1,1}] \cap (a_{j,1}, b_{j,1}) \right) \times \cdots \times \left( [c_{k_n,1}, c_{k_n+1,1}] \cap (a_{j,n}, b_{j,n}) \right).$$

Devido à ordenação de  $C_m, 1 \leq m \leq n$ , isto implica que

$$a_{j,1} \leq c_{k_1,1}, c_{k_1+1,1} \leq b_{j,1} \Leftrightarrow [c_{k_1,1}, c_{k_1+1,1}] \subset [a_{j,1}, b_{j,1}]$$

⋮

$$a_{j,n} \leq c_{k_n,n}, c_{k_n+1,n} \leq b_{j,n} \Leftrightarrow [c_{k_n,n}, c_{k_n+1,n}] \subset [a_{j,n}, b_{j,n}],$$

ou seja,  $[c_{k_1,1}, c_{k_1+1,1}] \times \cdots \times [c_{k_n,1}, c_{k_n+1,1}] \subset K_j$ .

□

**Proposição 4.0.14.** *Sejam  $K, K_1, K_2, \dots, K_r \subset \mathbb{R}^n$  retângulos tais que  $\cup_{l=1}^r K_l = K$  e  $\text{int}(K_l) \cap \text{int}(K_t) = \emptyset, \forall l, t \in \{1, \dots, r\}$ . Se  $f : K \rightarrow E$  é uma aplicação integrável, então  $f|_{K_l}, l = 1, \dots, r$ , é integrável e*

$$\int_K f(x)dx = \sum_{l=1}^r \int_{K_l} f|_{K_l}(x)dx.$$

**Prova:** Seja  $\epsilon > 0$ , e  $\delta > 0$  tal que para qualquer partição  $\mathcal{C}$  de  $K$  com  $\text{diam}(\mathcal{C}) < \delta$ , temos  $\|s(f, \mathcal{C}) - \int_K f(x)dx\| < \epsilon/(2 \text{vol}(K))$ . Tomando duas somas de Riemann  $s(f, \mathcal{C}), \hat{s}(f, \mathcal{C})$  distintas de uma mesma partição  $\mathcal{C}$ , em que em apenas um certo retângulo  $C_j \in \mathcal{C}$  fizemos escolhas diferentes  $x_j \neq \hat{x}_j \in C_j$ , temos que

$$\|f(x_j) - f(\hat{x}_j)\| \cdot \text{vol}(C_j) = \|(f(x_j) - f(\hat{x}_j)) \cdot \text{vol}(C_j)\| = \|s(f, \mathcal{C}) - \hat{s}(f, \mathcal{C})\| < \epsilon / \text{vol}(K),$$

o que nos permite concluir que  $\sup_{x,y \in C_j} \{\|f(x) - f(y)\|\} < \epsilon / \text{vol}(C_j)$ . De fato, como  $\mathcal{C}$  é arbitrária, variando ligeiramente os pontos extremos dos intervalos das partições na reta associadas a  $\mathcal{C}$ , é fácil ver que  $\sup_{x,y \in \overline{C_j}} \{\|f(x) - f(y)\|\} < \epsilon / (\text{vol}(C_j) \cdot \text{vol}(K))$ .

Seja  $l \in \{1, \dots, r\}$  fixado. Dadas partições  $\mathcal{C}_l, \hat{\mathcal{C}}_l$  do retângulo  $K_l$  com  $\text{diam}(\mathcal{C}_l) < \delta$  e  $\hat{\mathcal{C}}_l$  refinando  $\mathcal{C}_l$ , temos:

$$\|s(f, \mathcal{C}_l) - s(f, \hat{\mathcal{C}}_l)\| = \left\| \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}_l} f(x_j) \text{vol}(C_j) - \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}_l} \sum_{C_{j,k} \in \mathcal{C}_j} f(x_{j,k}) \text{vol}(C_{j,k}) \right\| \leq$$

$$\sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}_l} \sum_{C_{j,k} \in \mathcal{C}_j} \|f(x_j) - f(x_{j,k})\| \text{vol}(C_{j,k}) < \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}_l} \sum_{C_{j,k} \in \mathcal{C}_j} \frac{\epsilon}{\text{vol}(C_j) \cdot \text{vol}(K)} \cdot \text{vol}(C_{j,k}) =$$

$$\sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}_l} \frac{\epsilon}{\text{vol}(C_j)} \cdot \sum_{C_{j,k} \in \mathcal{C}_j} \text{vol}(C_{j,k}) = \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}_l} \frac{\epsilon}{\text{vol}(C_j) \cdot \text{vol}(K)} \cdot \text{vol}(C_j)$$

□

**Proposição 4.0.15.** *Seja  $f : K \rightarrow E$  integrável tal que a aplicação  $\|f\| : K \rightarrow \mathbb{R}$  também seja integrável. Então*

$$\left\| \int_K f(x) dx \right\| \leq \int_K \|f(x)\| dx.$$

**Prova:** Seja  $\epsilon > 0$  dado, e seja  $\delta > 0$  tal que para qualquer partição  $\mathcal{C}$  com  $\text{diam}(\mathcal{C}) < \delta$  vale:

$$\left\| \int_K f(x) dx - s(f, \mathcal{C}) \right\| < \epsilon/2, \quad \left| \int_K \|f(x)\| dx - s(\|f\|, \mathcal{C}) \right| < \epsilon/2.$$

Daí, para uma tal partição  $\mathcal{C}$  fixada, temos:

$$\|s(f, \mathcal{C})\| = \left\| \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} f(x_j) \cdot \text{vol}(C_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} \|f(x_j)\| \cdot \text{vol}(C_j) = s(\|f\|, \mathcal{C}).$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \left\| \int_K f(x) dx \right\| &\leq \left\| \int_K f(x) dx - s(f, \mathcal{C}) \right\| + \|s(f, \mathcal{C})\| \leq s(\|f\|, \mathcal{C}) + \epsilon/2 = \\ & \quad \left| \int_K \|f(x)\| dx + s(\|f\|, \mathcal{C}) - \int_K \|f(x)\| dx \right| + \epsilon/2 \leq \\ & \quad \left| \int_K \|f(x)\| dx \right| + |s(\|f\|, \mathcal{C}) - \int_K \|f(x)\| dx| + \epsilon/2 + \epsilon/2 = \int_K \|f(x)\| dx + \epsilon. \end{aligned}$$

Como  $\epsilon > 0$  é arbitrário, concluímos que

$$\left\| \int_K f(x) dx \right\| \leq \int_K \|f(x)\| dx.$$

□

**Teorema 4.0.16.** *Seja  $K$  um retângulo compacto, e  $E$  um espaço de Banach. Se  $f_n : K \rightarrow E$  é uma sequência de aplicações contínuas convergindo uniformemente a  $f : K \rightarrow E$ , então*

$$\int_K f_n(x)dx \rightarrow \int_K f(x)dx, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

De fato, vale algo mais forte:

$$\int_K \|f_n(x) - f(x)\|dx \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

**Prova:** Como  $f_n \rightrightarrows f$ , temos que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|f_n - f\| < \epsilon/(2 \text{vol}(K)), \forall n \geq n_0$ . Tomando uma partição  $\mathcal{C}$  com diâmetro suficientemente pequeno, temos

$$\left| \int_K \|f_n - f\|(x)dx - s(\|f_n - f\|, \mathcal{C}) \right| < \epsilon/2 \Rightarrow \int_K \|f_n - f\|dx < s(\|f_n - f\|, \mathcal{C}) + \epsilon/2.$$

Ora,

$$s(\|f_n - f\|, \mathcal{C}) = \sum_{j=1}^r \|f_n(x_j) - f(x_j)\| \cdot \text{vol}(C_j) \underbrace{\leq}_{n \geq n_0} \sum_{j=1}^r \frac{\epsilon}{2 \text{vol}(K)} m(C_j),$$

com  $C_j \in \mathcal{C}$ . O que implica que  $s(\|f_n - f\|, \mathcal{C}) < \epsilon$  e portanto

$$\int_K \|f_n - f\|(x)dx < s(\|f_n - f\|, \mathcal{C}) + \epsilon/2 < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

Para vermos a primeira afirmação, basta combinarmos o que acabamos de provar com a linearidade da integral e a proposição 4.0.15. De fato:

$$\begin{aligned} \left\| \int_K f_n(x)dx - \int_K f(x)dx \right\| &= \left\| \int_K f_n(x) - f(x)dx \right\| \leq \\ &\int_K \|f_n - f\|(x)dx < \epsilon, \forall n \geq n_0, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\int_K f_n(x)dx \rightarrow \int_K f(x)dx, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

□

**Observação 4.0.17.** Note que na prova do teorema acima, só precisamos da hipótese de continuidade para garantir as integrabilidades de  $f_n$ ,  $f$  e  $\|f_n - f\|$ . Se supusermos que tais aplicações são integráveis a Riemann e que  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ , então ainda vale que  $\int_K \|f_n - f\|(x)dx \rightarrow 0$ .

## 4.1 O Teorema Fundamental do Cálculo

**Proposição 4.1.1.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow E$ ,  $E$  um espaço de Banach,  $f$  contínua. Se  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ , então  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .*

**Prova:** Seja  $\epsilon > 0$  dado e  $\delta > 0$  (da continuidade de  $f$ ) tal que

$$t \in (x - \delta, x + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow \|f(t) - f(x)\| < \epsilon.$$

Supondo sem perda  $h > 0$  (as contas para  $h < 0$  são análogas), temos:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} - f(x) \right\| &= \left\| \frac{\int_x^{x+h} f(t) - f(x)dt}{h} \right\| \leq \\ & \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \|f(t) - f(x)\| dt \underbrace{\leq}_{|h| < \delta} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \epsilon dt = \frac{\epsilon \cdot h}{h} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $f(x) = F'(x)$ . □

**Teorema 4.1.2.** *Seja  $F : [a, b] \rightarrow E$ ,  $E$  espaço de Banach, e seja  $f : [a, b] \rightarrow E$  contínua tal que  $F$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ , com  $F'(t) = f(t)$ ,  $\forall t \in (a, b)$ . Então*

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)dt.$$

**Prova:** Seja  $\epsilon > 0$  dado e  $\tilde{\delta}$  tal que  $\|\int_a^b f(t)dt - s(f, \mathcal{P})\| < \epsilon/2$ , para toda partição  $\mathcal{P}$  com  $\text{diam}(\mathcal{P}) < \tilde{\delta}$ , e qualquer soma de Riemann  $s(f, \mathcal{P})$  de  $f$  em relação a  $\mathcal{P}$ . Escrevamos então  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_r\}$ , com  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$  o conjunto dos extremos dos intervalos de uma tal partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ . Como  $f$  é contínua no compacto  $[a, b]$ , é uniformemente contínua, logo existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{\epsilon}{2 \cdot (b - a)}.$$

Supomos sem perda que  $\text{diam}(\mathcal{P}) < \delta$ . Note que  $F(b) - F(a) = \sum_{j=0}^{r-1} F(t_{j+1}) - F(t_j)$ . Então temos:

$$\|F(b) - F(a) - \sum_{j=0}^{r-1} f(t_j)(t_{j+1} - t_j)\| = \left\| \sum_{j=0}^{r-1} F(t_{j+1}) - F(t_j) - \underbrace{\sum_{j=0}^{r-1} f(t_j)(t_{j+1} - t_j)}_{=s(f, \mathcal{P})} \right\| \leq$$

(usando a desigualdade triangular)

$$\sum_{j=0}^{r-1} \|F(t_{j+1}) - F(t_j) - f(t_j)(t_{j+1} - t_j)\| \leq$$

(da desigualdade do Valor Médio segue-se)

$$\sum_{j=0}^{r-1} \sup_{t \in (t_j, t_{j+1})} \{\|f(t) - f(t_j)\|\} \|t_{j+1} - t_j\| \leq \frac{\epsilon}{2 \cdot (b-a)} \sum_{j=0}^{r-1} \|t_{j+1} - t_j\| = \epsilon/2.$$

Finalmente, temos que:

$$\|F(b) - F(a) - \int_a^b f(t)dt\| \leq \|F(b) - F(a) - s(f, \mathcal{P})\| + \|s(f, \mathcal{P}) - \int_a^b f(t)dt\| \leq \epsilon;$$

como  $\epsilon > 0$  é arbitrário, concluímos que  $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ . □

Quando  $E = \mathbb{R}^n$ , o mesmo resultado vale sob hipóteses mais fracas:

**Teorema 4.1.3.** *Seja  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  integrável tal que  $F$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ , com  $F'(t) = f(t)$ ,  $\forall t \in (a, b)$ . Então*

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)dt.$$

**Prova:** A exemplo do teorema anterior, seja  $\epsilon > 0$  dado e  $\tilde{\delta}$  tal que  $\|\int_a^b f(t)dt - s(f, \mathcal{P})\| < \epsilon/2$ , para toda partição  $\mathcal{P}$  com  $\text{diam}(\mathcal{P}) < \tilde{\delta}$ , e qualquer soma de Riemann  $s(f, \mathcal{P})$  de  $f$  em relação a  $\mathcal{P}$ . Escrevamos então  $P = \{t_0, \dots, t_r\}$ , com  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$  o conjunto dos extremos dos intervalos de uma tal partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ .

Inicialmente, vamos supor  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Daí, a igualdade do Valor Médio nos dá:

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=0}^{r-1} (F(t_{j+1}) - F(t_j)) = \sum_{j=0}^{r-1} f(\hat{t}_j) \cdot (t_{j+1} - t_j),$$

com  $t \in (t_j, t_{j+1})$ . Como a soma do último membro acima é uma soma de Riemann para a partição  $\mathcal{P}$ , segue-se que:

$$|F(b) - F(a) - \int_a^b f(t)dt| \leq |F(b) - F(a) - \sum_{j=0}^{r-1} f(\hat{t}_j) \cdot (t_{j+1} - t_j)| +$$

$$\left| \sum_{j=0}^{r-1} f(\hat{t}_j) \cdot (t_{j+1} - t_j) - \int_a^b f(t)dt \right| < \epsilon,$$

e como anteriormente, vale  $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ .

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , usando o caso acima provado, temos:

$$F(b) - F(a) = \begin{pmatrix} F_1(b) - F_1(a) \\ \vdots \\ F_n(b) - F_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)dt \end{pmatrix} = \int_a^b f(t)dt.$$

□

## 4.2 Fórmulas Clássicas do Cálculo

**Teorema 4.2.1.** (*Mudança de Variáveis*). *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável com  $g'$  derivável e integrável e  $g([c, d]) \subset [a, b]$ . Então*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(y)dy = \int_c^d f(g(x)) \cdot g'(x)dx.$$

**Prova:** Pelo teorema Fundamental do Cálculo, temos  $\int_{g(c)}^{g(d)} f(y)dy = F(g(d)) - F(g(c))$ , com  $F' \equiv f$ . Por outro lado, a regra da cadeia nos dá:

$$f \circ g(t) \cdot g'(t) = (F \circ g)'(t) \Rightarrow \int_c^d f \circ g(t) \cdot g'(t)dt = \int_c^d (F \circ g)'(t)dt = F \circ g(d) - F \circ g(c).$$

□

**Teorema 4.2.2.** (*Integração por partes*). *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com derivadas integráveis. Então*

$$\int_a^b f(t) \cdot g'(t)dt = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) - \int_a^b f'(t) \cdot g(t)dt.$$

**Prova:** Pelo teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) &= \int_a^b (f \cdot g)'(t)dt = \int_a^b f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)dt = \\ &= \int_a^b f'(t) \cdot g(t)dt + \int_a^b f(t) \cdot g'(t)dt. \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.2.3.** (*Valor Médio para Integrais da reta*). Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e seja  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável à Riemann. Então valem:

(A) Existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\int_a^b f(t)dt = f(c) \cdot (b - a).$$

(B) Se  $p$  não muda de sinal, então existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\int_a^b f(t) \cdot p(t)dt = f(c) \cdot \int_a^b p(t)dt.$$

(C) Se  $p$  é positiva, não crescente com derivada integrável, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\int_a^b f(t) \cdot p(t)dt = p(a) \cdot \int_a^c f(t)dt.$$

**Prova:**

(A) Escrevendo  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ , temos pelo teorema Fundamental do Cálculo, que  $F$  é derivável em  $(a, b)$  com  $F' = f$ . É claro que  $F$  é contínua em  $[a, b]$ :

$$\left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \{ \|f(t)\| \} \cdot \|x - y\|,$$

ou seja,  $F$  é lipschitziana (lembramos que, por definição, toda função integrável à Riemann é limitada). Pela Igualdade do Valor Médio existe  $c \in (a, b)$  tal que  $F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a) = f(c) \cdot (b - a)$ .

(B) Sem perda, suponha que  $p(t) > 0, \forall t \in [a, b]$ . Como  $f$  é integrável, é limitada, portanto

$$\begin{aligned} \inf_{t \in [a, b]} \{f(t)\} \leq f(x) \leq \sup_{t \in [a, b]} \{f(t)\} &\Rightarrow \\ \inf_{t \in [a, b]} \{f(t)\} \cdot p(x) \leq f(x) \cdot p(x) \leq \sup_{t \in [a, b]} \{f(t)\} \cdot p(x), \end{aligned}$$

logo

$$\inf_{t \in [a,b]} \{f(t)\} \int_a^b p(x)dx = \int_a^b \inf_{t \in [a,b]} \{f(t)\} \cdot p(x)dx \leq \int_a^b f(x) \cdot p(x)dx \leq \int_a^b \sup_{t \in [a,b]} \{f(t)\} \cdot p(x)dx = \sup_{t \in [a,b]} \{f(t)\} \int_a^b p(x)dx.$$

Pelo teorema do Valor Intermediário para derivadas aplicado a  $f = F'$ , temos que  $f([a, b]) \supset (\inf_{t \in [a,b]} \{f(t)\}, \sup_{t \in [a,b]} \{f(t)\})$ . Existe então  $a < c < b$  tal que  $f(c) \cdot \int_a^b p(x)dx = \int_a^b f(x) \cdot p(x)dx$ .

- (C) Lembrando que definindo  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ , temos  $F' = f$  e  $F(a) = 0$ . Daí, usando Integração por partes,

$$\int_a^b f(t) \cdot p(t)dt = \int_a^b F'(t) \cdot p(t)dt = F(b) \cdot p(b) - F(a) \cdot p(a) - \int_a^b F(t) p'(t)dt.$$

Pelo item anterior, existe  $s \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b f(t) \cdot p(t)dt = F(b) \cdot p(b) - F(s) \cdot \int_a^b p'(t)dt = F(b) \cdot p(b) - F(s) \cdot (p(b) - p(a)).$$

Note que

$$F(b) \cdot p(b) - F(s) \cdot (p(b) - p(a)) = (F(s) \cdot \frac{(p(a) - p(b))}{p(a)} + \frac{F(b) \cdot p(b)}{p(a)}) \cdot p(a) = d \cdot p(a).$$

Veja que  $\frac{p(a) - p(b)}{p(a)} + \frac{p(b)}{p(a)} = 1$ , o que quer dizer que  $d$  é combinação convexa de dois valores da função contínua  $F$ . Logo, pelo teorema do Valor Intermediário aplicado a  $F$ , temos:

$$F(s) \leq d \leq F(b) \Rightarrow \exists c \text{ tal que } F(c) = d.$$

Por conseguinte,

$$\int_a^b f(t) \cdot p(t)dt = F(b) \cdot p(b) - F(s) \cdot (p(b) - p(a)) = F(c) \cdot p(a) = \int_a^c f(t)dt \cdot p(a).$$

□

### 4.3 Caracterização das Aplicações Integráveis à Riemann

Nesta seção, consideraremos  $K \subset \mathbb{R}^n$  um retângulo compacto,  $E$  um espaço de Banach, e  $f : K \rightarrow E$  uma aplicação limitada.

**Definição 4.3.1.** (Oscilação). Seja  $S \subset K$  um conjunto. A *oscilação de  $f$  em  $S$*  é definida como

$$\omega_S := \text{diam}(f(S)) = \sup_{x,y \in S} \{d(f(x), f(y))\}.$$

Note que se  $\hat{S} \subset S$ , vale  $\omega_{\hat{S}} \leq \omega_S$ . Desse modo, se  $x \in K$ , definimos a *oscilação de  $f$  em  $x$*  como a função  $\omega : K \rightarrow [0, +\infty)$  dada por:

$$\omega(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{B(x,\delta)} = \inf_{\delta > 0} \omega_{B(x,\delta)}.$$

**Proposição 4.3.2.** *Seja  $x \in K$ . Então*

$$\omega(x) = 0 \Leftrightarrow f \text{ é contínua em } x.$$

**Prova:**

( $\Rightarrow$ ) Seja  $\epsilon > 0$ . Como  $\omega(x) = 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\omega_{B(x,\delta)} = \text{diam}(f(B(x,\delta))) < \epsilon$ . Por conseguinte,  $\forall y \in B(x,\delta)$ , vale  $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ , o que significa que  $f$  é contínua em  $x \in K$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\epsilon > 0$  dado. Como  $f$  é contínua em  $x \in K$ , existe  $\delta_0 > 0$  tal que  $y \in B(x,\delta_0) \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon/3$ . Logo,  $\forall y, z \in B(x,\delta_0)$ , temos

$$d(f(y), f(z)) \leq d(f(y), f(x)) + d(f(x), f(z)) < \frac{2\epsilon}{3} \Rightarrow$$

$$\omega_{B(x,\delta_0)} = \text{diam}(f(B(x,\delta_0))) \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon;$$

visto que  $\omega(x) = \inf_{\delta > 0} \omega_{B(x,\delta)}$ , concluímos que  $\omega(x) < \epsilon$ . Como  $\epsilon > 0$  é arbitrário e  $\omega(x) \geq 0$ , segue-se que  $\omega(x) = 0$ .

□

**Teorema 4.3.3.** (Semicontinuidade de  $\omega$ ). A função  $\omega : K \rightarrow [0, +\infty)$  é semicontínua superior: fixado  $x_0 \in K$ ,  $\forall \epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x_0, y) < \delta \Rightarrow \omega(y) < \omega(x_0) + \epsilon.$$

**Prova:**

Seja  $\epsilon > 0$  dado. Tome  $\delta_0$  tal que  $\omega(x_0) \leq \text{diam}(f(B(x_0, \delta_0))) < \omega(x_0) + \epsilon$ . Tomando  $\delta = \delta_0/2$ , devido à desigualdade triangular, temos que dado  $y \in B(x_0, \delta)$ , vale a inclusão  $B(y, \delta) \subset B(x_0, \delta_0)$ . Em particular, isso implica que

$$\begin{aligned} f(B(y, \delta)) \subset f(B(x_0, \delta_0)) \Rightarrow \omega(y) \leq \omega(B(y, \delta)) = \text{diam}(f(B(y, \delta))) \leq \\ \text{diam}(f(B(x_0, \delta_0))) < \omega(x_0) + \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja,  $\omega$  é semicontínua superior. □

**Corolário 4.3.4.** Seja  $\alpha \geq 0$ , e  $x_0 \in K$ . Se  $\omega(x_0) < \alpha$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $\omega(x) < \alpha$ ,  $\forall x \in B(x_0, \delta)$ . Em particular, o conjunto  $\{x \in K; \omega(x) < \alpha\}$  é aberto.

**Prova:** Imediata do teorema. □

**Corolário 4.3.5.** Seja  $\alpha \geq 0$ . Então conjunto  $\{x \in K : \omega(x) \geq \alpha\}$  é compacto.

**Prova:**

Pelo corolário anterior,  $\{x \in K; \omega(x) < \alpha\}$  é aberto, logo

$$\{x \in K : \omega(x) \geq \alpha\} = K \setminus \{x \in K; \omega(x) < \alpha\}$$

é subconjunto fechado em  $K$ , portanto compacto, já que  $K$  é compacto. □

**Definição 4.3.6.** (Conjunto de conteúdo nulo, segundo Jordan). Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$ .  $S$  é dito um conjunto de conteúdo nulo (ou que possui conteúdo nulo) se dado  $\epsilon > 0$ , existir um coleção finita formada por bolas abertas  $B_1, \dots, B_q$  tais que  $\cup_{j=1}^q B_j \supset S$  e  $\sum_{j=1}^q \text{vol}(B_j) < \epsilon$ .

**Definição 4.3.7.** (Conjunto de medida nula de Lebesgue). Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$ .  $S$  é dito um conjunto de medida nula de Lebesgue se dado  $\epsilon > 0$ , existir uma coleção enumerável formada por bolas abertas  $B_1, B_2, \dots$  tais que  $\cup_{j=1}^{\infty} B_j \supset S$  e  $\sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(B_j) < \epsilon$ .

**Observação 4.3.8.** Tanto faz usarmos bolas fechadas em ambas as definições acima. Por exemplo, suponha que  $C \subset \mathbb{R}^n$  seja um conjunto tal que dado  $\hat{\epsilon} > 0$ , existe uma coleção  $\{\hat{B}_j\}$  de bolas fechadas que cobre  $C$  e com  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\hat{B}_j) < \epsilon$ . Então dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar uma coleção de bolas fechadas  $\{B_j\}$  que cobre  $C$  e tal que  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(B_j) < \epsilon/2^n$ . Seja  $\{\tilde{B}_j\}$  a coleção das bolas abertas com os mesmos centros que das correspondentes bolas  $B_j$  mas o dobro do raio. Daí,  $\cup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{B}_j \supset C$  e  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\tilde{B}_j) \leq 2^n \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(B_j) < \epsilon$ . Concluimos nesse caso que  $C$  possui medida nula ( a recíproca é imediata, se  $C$  possui medida nula, dado  $\epsilon > 0$   $C$  possui cobertura por bolas fechadas com soma de seus volumes menor que  $\epsilon$ ). O caso de conteúdo nulo é totalmnte análogo.

**Observação 4.3.9.** Note que todo conjunto de conteúdo nulo, é de medida nula de Lebesgue. Por outro lado se um conjunto compacto é de medida nula de Lebesgue, então ele também é de conteúdo nulo.

**Lema 4.3.10.** *Sejam  $K \subset \mathbb{R}^n$  um retângulo,  $B := B(x_0, r) \subset K$  e  $\mathcal{C}$  uma partição de  $K$  com  $\text{diam}(\mathcal{C}) < r$ . Então*

$$\sum_{C_j \in \mathcal{C}, C_j \cap B \neq \emptyset} \text{vol}(C_j) \leq 2^n \cdot \text{vol}(B).$$

**Prova:**

Seja  $\hat{B}$  a bola fechada de mesmo centro que  $B$  e raio  $2r$ . Dado  $y \in C_j \in \mathcal{C}$ , com  $z \in C_j \cap B \neq \emptyset$  temos

$$d(y, x_0) \leq d(y, z) + d(z, x_0) < 2r.$$

Portanto  $C_j \subset \hat{B}$ . Aplicando o lema 4.0.13 ao retângulo  $\hat{B}$  e a coleção de retângulos  $\mathcal{C}_B = \{C_j \in \mathcal{C}, C_j \cap B \neq \emptyset\}$ , temos que existe uma partição  $\hat{\mathcal{C}}$  de  $\hat{B}$  tal que qualquer  $\overline{C_j}, C_j \in \mathcal{C}_B$  se escreve como união de fechos de elementos de  $\hat{\mathcal{C}}$ . Daí,

$$\begin{aligned} 2^n \text{vol}(B) &\geq \text{vol}(\hat{B}) = \sum_{\hat{C}_l \in \hat{\mathcal{C}}} \text{vol}(\hat{C}_l) \geq \\ &\sum_{C_j \in \mathcal{C}, C_j \cap B \neq \emptyset} \sum_{\hat{C}_l \subset C_j} \text{vol}(\hat{C}_l) = \sum_{C_j \in \mathcal{C}, C_j \cap B \neq \emptyset} \text{vol}(C_j). \end{aligned}$$

(Note que  $2^n \cdot \text{vol}(B)$ , nem sempre é igual a  $\text{vol}(\hat{B})$ , pois uma bola em  $K$  é a intersecção de uma bola de  $\mathbb{R}^n$  com  $K$ .)

□

**Teorema 4.3.11.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  um retângulo e seja  $f : K \rightarrow E$  uma aplicação limitada tal que, dado  $\delta > 0$ , o conjunto  $E_\delta := \{x \in K, \omega(x) \geq \delta\}$  tem conteúdo nulo. Então,  $f$  é integrável à Riemann.*

**Prova:** Dado  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta = \frac{\epsilon}{3 \text{vol}(K)}$ . Como  $E_\delta$  possui conteúdo nulo, tome uma cobertura finita  $\mathcal{B}$  de  $E_\delta$  por bolas (“quadradas”, com arestas paralelas aos eixos cartesianos)  $B_1, \dots, B_s$ , tais que  $\sum_{j=1}^s \text{vol}(B_j) < \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^n \text{diam}(f(K))}$ .

Como  $\omega(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \omega_{B(x,r)}$ , para cada  $x \in K$ ,  $\exists B(x, r_x)$  tal que

$$|\omega_{B(x,r_x)} - \omega(x)| < \frac{\delta}{2}.$$

Tomemos então  $\{B(x_1, r_{x_1}), \dots, B(x_q, r_{x_q})\}$  uma subcobertura finita da cobertura de  $K$  dada por  $\cup_{x \in K} B(x, r_x)$  e seja  $\eta$  seu número de Lebesgue, o qual supomos sem perda que seja também menor que o mínimo dos diâmetros das bolas  $B_1, \dots, B_s$  do primeiro parágrafo desta demonstração.

Mostremos que dadas duas partições  $\mathcal{C}$  e  $\hat{\mathcal{C}}$  tais que  $\text{diam}(\mathcal{C}) < \eta$ ,  $\text{diam}(\hat{\mathcal{C}}) < \eta$ , então quaisquer somas de Riemann

$$\|s(\mathcal{C}) - s(\hat{\mathcal{C}})\| < \epsilon.$$

Supondo (sem perda) que  $\hat{\mathcal{C}}$  refina  $\mathcal{C}$ , temos:

$$\|s(\mathcal{C}) - s(\hat{\mathcal{C}})\| = \left\| \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} f(x_j) \text{vol}(C_j) - \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} \sum_{l=1}^{m(j)} f(\hat{x}_{j,l}) \text{vol}(\hat{C}_{j,l}) \right\|,$$

onde  $\cup_{l=1}^{m(j)} \hat{C}_{j,l} = C_j$ . Temos então:

$$\|s(\mathcal{C}) - s(\hat{\mathcal{C}})\| = \left\| \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} \left( f(x_j) \text{vol}(C_j) - \sum_{l=1}^{m(j)} f(\hat{x}_{j,l}) \text{vol}(\hat{C}_{j,l}) \right) \right\| \leq$$

(empregando a desigualdade triangular)

$$\sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} \sum_{l=1}^{m(j)} \|f(x_j) - f(\hat{x}_{j,l})\| \text{vol}(\hat{C}_{j,l}) =$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j; C_j \cap \cup_{i=1}^s B_i \neq \emptyset} \sum_{l=1}^{m(j)} \|f(x_j) - f(\hat{x}_{j,l})\| \text{vol}(\hat{C}_{j,l}) + \\
 & \sum_{j; C_j \cap \cup_{i=1}^s B_i = \emptyset} \sum_{l=1}^{m(j)} \|f(x_j) - f(\hat{x}_{j,l})\| \text{vol}(\hat{C}_{j,l}) \leq \\
 & \sum_{j; C_j \cap \cup_{i=1}^s B_i \neq \emptyset} \text{diam}(f(K)) \sum_{l=1}^{m(j)} \text{vol}(\hat{C}_{j,l}) + \sum_{j; C_j \cap \cup_{i=1}^s B_i = \emptyset} \sum_{l=1}^{m(j)} 2\delta \text{vol}(\hat{C}_{j,l}) = \\
 & \sum_{j; C_j \cap \cup_{i=1}^s B_i \neq \emptyset} \text{diam}(f(K)) \text{vol}(C_j) + \sum_{j; C_j \cap \cup_{i=1}^s B_i = \emptyset} \frac{\epsilon}{3 \text{vol}(K)} \text{vol}(C_j) \leq \\
 & \text{diam}(f(K)) \cdot \sum_{i=1}^s \sum_{j; (C_j \cap B_i) \neq \emptyset} \text{vol}(C_j) + 2\delta \sum_{j=1}^{\#\mathcal{C}} \text{vol}(C_j) \\
 & \text{diam}(f(K)) \cdot \sum_{i=1}^s 2^n \text{vol}(B_i) + \frac{2\epsilon}{3 \text{vol}(K)} \text{vol}(K) \leq \\
 & \text{diam}(f(K)) \cdot 2^n \cdot \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^n \text{diam}(f(K))} + 2\epsilon/3 = \epsilon.
 \end{aligned}$$

□

O próximo corolário é essencialmente uma formulação mais fechada, utilizável do teorema anterior.

**Corolário 4.3.12.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E$  espaço de Banach, e  $f : K \rightarrow E$  limitada. Se o conjunto  $D \subset K$  dos pontos de descontinuidades de  $f$  tem medida nula de Lebesgue, então  $f$  é integrável a Riemann.*

**Prova:** Seja  $\delta > 0$  qualquer. Escrevendo  $E_\delta := \{x \in K; w(x) \geq \delta\}$ , pela proposição 4.3.2, temos que  $D = \cup_{\delta > 0} E_\delta$ . Note que fixado  $\delta > 0$ ,  $E_\delta$  é de conteúdo nulo. De fato, dado  $\epsilon > 0$ , como  $D$  é de medida nula de Lebesgue, existe uma cobertura por bolas  $\cup_{s=1}^{\infty} B_s \supset D \supset E_\delta$ , com  $\sum_{s=1}^{+\infty} \text{vol}(B_s) < \epsilon$ . Como  $E_\delta$  é compacto, existe  $t \in \mathbb{N}$ , tal que  $\sum_{s=1}^t \text{vol}(B_s) < \epsilon$ . Como  $\epsilon > 0$  é arbitrário, segue-se a afirmação de que  $E_\delta$  é de conteúdo nulo.

Pelo teorema 4.3.11,  $f$  é integrável a Riemann.

□

**Lema 4.3.13.** *Seja  $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$  um retângulo com volume positivo. Então existe uma coleção de bolas (“quadradas”) fechadas  $B_1 \cup \dots \cup B_s \supset \tilde{K}$  tais que  $\sum_{j=1}^s \text{vol}(B_j) < 2 \text{vol}(\tilde{K})$ .*

**Prova:**

Não há perda em considerar  $\tilde{K}$  compacto e assim o faremos. Suponha que  $\tilde{K} = [\tilde{a}_1, \tilde{b}_1] \times \dots \times [\tilde{a}_n, \tilde{b}_n]$ . Tome então  $p_1/q_1, \dots, p_n/q_n \in \mathbb{Q}$  tais que  $p_j/q_j \geq (b_j - a_j), \forall j \in \{1, \dots, n\}$  e  $|p_1/q_1 \cdots p_n/q_n - \text{vol}(\tilde{K})| < \text{vol}(\tilde{K})$ . Definindo o retângulo  $\hat{K} = [\tilde{a}_1, \tilde{a}_1 + p_1/q_1] \times \dots \times [\tilde{a}_n, \tilde{a}_n + p_n/q_n]$ , temos que  $\hat{K} \supset \tilde{K}$  e que  $\text{vol}(\hat{K}) = p_1/q_1 \cdots p_n/q_n < 2 \text{vol}(\tilde{K})$ . Mostremos que  $\hat{K}$  pode ser coberto (e logo  $\tilde{K}$  também será coberto) por uma coleção de bolas fechadas cuja soma dos volumes iguala  $\text{vol}(\hat{K})$ . De fato, seja  $q = q_1 \cdots q_n$  e  $r = 1/q$ . Então podemos subdividir cada aresta  $[\tilde{a}_1, \tilde{a}_1 + p_1/q_1], \dots, [\tilde{a}_n, \tilde{a}_n + p_n/q_n]$  em intervalos fechados de igual comprimento  $r$  cujos interiores são disjuntos. Mais precisamente, denominemos por  $I_{j,k(j)} := [\tilde{a}_j + (k(j) - 1) \cdot r, \tilde{a}_j + k(j) \cdot r]$ , onde  $j = 1, \dots, n$  e  $k(j) = 1, \dots, (p_j \cdot q)/q_j$ . Daí a coleção de bolas  $\mathcal{B} := \{I_{1,k(1)} \times \dots \times I_{n,k(n)}, \text{ com } k(j) = 1, \dots, (p_j \cdot q)/q_j, \text{ para } j = 1, \dots, n\}$  cobre  $\hat{K}$  e a soma de seus volumes é:

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{B}} \text{vol}(B) &= \sum_{k(1)=1}^{(p_1 \cdot q)/q_1} \cdots \sum_{k(n)=1}^{(p_n \cdot q)/q_n} \text{vol}_n(I_{1,k(1)} \times \dots \times I_{n,k(n)}) = \\ & \sum_{k(1)=1}^{(p_1 \cdot q)/q_1} \cdots \sum_{k(n-1)=1}^{(p_{n-1} \cdot q)/q_{n-1}} \text{vol}_{n-1}(I_{1,k(1)} \times \dots \times I_{n-1,k(n-1)}) \cdot \sum_{k(n)=1}^{(p_n \cdot q)/q_n} \text{vol}_1(I_{n,k(n)}) = \\ & \sum_{k(1)=1}^{(p_1 \cdot q)/q_1} \cdots \sum_{k(n-1)=1}^{(p_{n-1} \cdot q)/q_{n-1}} \text{vol}_{n-1}(I_{1,k(1)} \times \dots \times I_{n-1,k(n-1)}) \cdot \sum_{k(n)=1}^{(p_n \cdot q)/q_n} 1/q = \\ & \sum_{k(1)=1}^{(p_1 \cdot q)/q_1} \cdots \sum_{k(n-1)=1}^{(p_{n-1} \cdot q)/q_{n-1}} \text{vol}_{n-1}(I_{1,k(1)} \times \dots \times I_{n-1,k(n-1)}) \cdot (p_n/q_n); \end{aligned}$$

Donde concluimos, procedendo indutivamente que  $\sum_{B \in \mathcal{B}} \text{vol}(B) = \text{vol}(\hat{K}) < 2 \text{vol}(\tilde{K})$ . □

**Teorema 4.3.14.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  e seja  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Então  $E_\delta := \{x \in K, \omega(x) \geq \delta\}$  possui conteúdo nulo,  $\forall \delta > 0$ .*

**Prova:** Seja  $\delta > 0$  fixado. Seja  $\epsilon > 0$  dado. Para cada  $x \in K$  tome  $r_x > 0$  tal que

$$|\omega_{B(x,r_x)} - \omega(x)| < \delta/2.$$

Tome então uma subcobertura finita de  $\cup_{x \in K} B(x, r_x/3)$  e  $\eta$  o número de Lebesgue desta subcobertura.

Como  $f$  é integrável, existe uma partição  $\mathcal{C}$  com diâmetro menor que  $\eta$  tal que para duas escolhas quaisquer  $\{x_j, x_j \in C_j \in \mathcal{C}\}$  e  $\{\hat{x}_j, \hat{x}_j \in C_j \in \mathcal{C}\}$ , temos

$$\left| \sum_{j=1}^k f(x_j) \text{vol}(C_j) - \sum_{j=1}^k f(\hat{x}_j) \text{vol}(C_j) \right| = \left| \sum_{j=1}^k (f(x_j) - f(\hat{x}_j)) \text{vol}(C_j) \right| < \epsilon \cdot \delta/2.$$

Em particular, tomando  $x_j$  e  $\hat{x}_j$  próximos, respectivamente, a  $\sup f(C_j)$  e  $\inf f(C_j)$ , concluímos que

$$\left| \sum_{j=1}^k (\sup f(C_j) - \inf f(C_j)) \cdot \text{vol}(C_j) \right| \leq \epsilon \cdot \delta/2 < \epsilon \cdot \delta.$$

Note que se  $y_j \in \text{int}(C_j)$ , temos

$$\sum_{j=1}^k \omega(y_j) \text{vol}(C_j) \leq \sum_{j=1}^k \omega_{C_j} \text{vol}(C_j) = \sum_{j=1}^k (\sup f(C_j) - \inf f(C_j)) \cdot \text{vol}(C_j) < \epsilon \cdot \delta.$$

Se  $y \in E_\delta$ , temos que  $\omega(y) \geq \delta$ . Seja  $\{\tilde{C}_j\}$  a coleção dos elementos de  $\mathcal{C}$  tal que  $\text{int} \tilde{C}_j \cap E_\delta \neq \emptyset$ . Daí,  $\cup \tilde{C}_j \supset E_\delta$ . Por outro lado,

$$\sum_{\tilde{C}_j} \delta \cdot \text{vol}(\tilde{C}_j) \leq \sum_{\tilde{C}_j} \omega_{\tilde{C}_j} \cdot \text{vol}(\tilde{C}_j) < \epsilon \cdot \delta \Rightarrow \sum_{\tilde{C}_j} \text{vol}(\tilde{C}_j) < \epsilon.$$

□

**Corolário 4.3.15.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  e seja  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Então o conjunto  $D \subset K$  dos pontos de descontinuidades de  $f$  é de medida nula de Lebesgue.*

**Prova:** Note que  $D = \cup_{j \in \mathbb{N}} E_{1/j}$ . Como  $f$  é integrável, o último teorema nos dá que  $E_{1/j}$  possui conteúdo nulo,  $\forall j \in \mathbb{N}$ .

Seja  $\epsilon > 0$ ; para cada  $j \in \mathbb{N}$ , tome uma cobertura por bolas  $\cup_{k=1}^{m(j)} B_{j,k} \supset E_{1/j}$  tal que  $\sum_{k=1}^{m(j)} \text{vol}(B_{j,k}) < \epsilon/2^{j+1}$ . Temos então que a união enumerável

$$\cup_{j=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{m(j)} B_{j,k} \supset D$$

e que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m(j)} \text{vol}(B_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon/2^{j+1} < \epsilon,$$

o que implica que  $D$  é um conjunto de medida nula de Lebesgue.

□

# Índice Remissivo

- Aplicação
  - aberta, 19
  - bilinear, 61
  - contínua, 15
  - contínua no ponto, 15
  - derivável
    - em um ponto, 63
  - fechada, 19
  - integrável à Riemann, 98
  - Lipschitz, 32
  - sequencialmente contínua, 18
  - uniformemente contínua, 32
- Aplicação linear
  - limitada, 51
- Base
  - de uma topologia, 3
  - de vizinhanças, 14
  - de vizinhanças enumerável, 14
- Cisão
  - por abertos, 6
  - trivial, 6
- Cobertura por abertos, 10
- Componente
  - conexa, 7
- Conjunto
  - aberto, 1
  - compacto, 10
  - conexo, 6
  - de conteúdo nulo, 113
  - de medida nula, 113
  - denso, 25
  - fechado, 4
  - limitado, 28
  - sequencialmente compacto, 14
  - sequencialmente fechado, 5
  - totalmente desconexo, 9
- Contração, 40
- Derivada, 64
  - de sequências de aplicações, 80
  - em um ponto, 63
- Derivadas
  - parciais, 77
- Derivadas de ordem superior, 64
- Desigualdade
  - do Valor Médio, 69
- Diâmetro
  - de um conjunto, 28
  - de uma partição, 97
- Difeomorfismo, 89
- Distância, 22
  - zero-um, 24
- Espaço
  - de Banach, 47
  - de Fréchet, 61
  - métrico, 22
    - completo, 35
    - produto, 44
    - totalmente limitado, 46

- separável, 25
- topológico, 1
  - com base de vizinhanças enumerável, 14
  - conexo, 6
  - Hausdorff, 13
- Espaços
  - homeomorfos, 19
- Extensão
  - de aplicações unif. contínuas, 38
- Fecho
  - de um conjunto, 5
- Forma local
  - das imersões, 94
  - das submersões, 93
- Fronteira
  - de um conjunto, 2
- Homeomorfismo, 19
- Imersão, 94
- Integração por partes, 109
- Integral
  - de Riemann, 98
- Interior
  - de um conjunto, 2
- Métrica, 22
- Métricas
  - equivalentes, 34
  - Lipschitz-equivalentes, 34
- Mergulho, 94
- Número
  - de Lebesgue, 29
- Norma, 46
  - do operador, 53
- Normas
  - equivalentes, 55
- Oscilação
  - em um conjunto, 112
  - em um ponto, 112
- Partição
  - de um conjunto, 8
  - de um intervalo, 97
  - de um retângulo, 97
- Posto
  - de uma aplicação linear, 95
- Produto cartesiano
  - de compactos, 45
  - de conexos, 44
- Propriedade
  - da intersecção finita, 11
- Refinamento
  - de uma partição, 98
- Regra da cadeia, 65
- Semicontinuidade
  - superior de  $\omega$ , 113
- Seminorma, 61
- Sequência, 3
  - convergente, 3
  - de Cauchy, 34
- Soma
  - de Riemann, 98
- Subcobertura, 10
  - enumerável, 10
  - finita, 10
- Submersão, 91
- Subsequência, 3
  - convergente, 3
- Teorema

- da função
  - implícita, 92
  - inversa, 89
- da perturbação
  - da aplicação bilipschitz, 86
  - da identidade, 85
  - do isomorfismo, 87
- de Baire, 39
- de Lindelöf, 26
- de Mudança de Variáveis, 109
- de Schwartz, 82
- do ponto fixo
  - para contrações, 40
- do posto, 95
- Fundamental do Cálculo, 107,  
108
- Topologia, 1
  - dada pela métrica, 24
  - induzida, 2
- Volume
  - de um retângulo, 97