A Teoria Axiomática dos Conjuntos

1 Axioma da Escolha

Nesta seção damos algumas formulações para o Axioma da Escolha.

Definição 1.1 (Axioma da Escolha) *Dada uma família não vazia C de conjuntos não vazios e disjuntos dois a dois, existe um conjunto E que contém exatamente um elemento de cada conjunto da família C. O conjunto E é chamado de conjunto escolha da família C.*

Exemplo 1.1 *Seja A um conjunto infinito. Então existe uma função injetora $f : \mathbb{N} \to A$.*

Solução: Definimos f da seguinte forma. Como A é não vazio, existe x_0 em A. Seja $f(0) = x_0$. Daí, como A é infinito, $A - \{x_0\}$ é não vazio. Logo existe x_1 em $A - \{x_0\}$. Seja então $f(1) = x_1$. Pelos mesmos argumentos, existe x_2 em $A - \{x_o, x_1\}$. Seja então $f(2) = x_2$. Desta forma f é dada por $f : \mathbb{N} \to A$ tal que $f(n) = x_n$, onde $x_n \in A - \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

É claro que f é injetora. **Mas f está definida?** Mostraremos que os argumentos ingênuos dados acima podem se tornar rigorosos a partir do Axioma da Escolha.

Seja $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(x, B_n); x \in B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $B_n = A - \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. C é uma família não vazia de conjuntos não vazios, disjuntos dois a dois. Pelo Axioma da Escolha, existe $E = \{(x_n, B_n); x_n \in B_n\}$, conjunto escolha para C, isto é, E contém exatamente um elemento de cada conjunto C_n de C.

Definimos então $f : \mathbb{N} \to A$ tal que $f(0) = x_0$ e $f(n) = x_n$, onde $(x_n, B_n) \in E \cap C_n$. Desta forma f está bem definida e é injetora, como queríamos.

Na sequência consideraremos algumas formulações equivalentes ao Axioma da Escolha. Antes disso, definiremos alguns conceitos imprescindíveis para o entendimento das formulações consideradas.

Definição 1.2 *Dada uma família de conjuntos, o* ***produto cartesiano da família*** *é o conjunto*

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \ ; \ f \text{ é função e } f(i) \in A_i\}.$$

Definição 1.3 *Seja S um conjunto não vazio e $P(S)$ o conjunto das partes de S . Uma* ***função escolha para S*** *é uma função*

$$\gamma : P(S) - \{\emptyset\} \to S$$

tal que $\gamma(A) \in A$, para todo $A \in P(S) - \{\emptyset\}$.

Formulação 1 (F1)

Dada uma família não vazia de conjuntos não vazios $C = \{A_i\}_{i\in I}$, indexada por I, existe uma função $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$, para todo $i \in I$. Tal função é chamada uma função escolha para a família C.

Formulação 2 (F2)

O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é não vazio.

Formulação 3 (F3)

Todo conjunto não vazio tem uma função escolha.

Segue agora as demonstrações das equivalências:

i) Axioma da Escolha equivalente à Formulação 1

AE $\Rightarrow$ F1

Seja $C = \{A_i\}_{i\in I}$ uma família não vazia de conjuntos não vazios. Consideremos $C' = \{A_i \times \{i\}\}_{i\in I}$. C' satisfaz as hipóteses do Axioma da Escolha, logo existe um conjunto escolha E para C'.

Definimos então $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ da seguinte forma: $f(i) = x_i$, onde x_i é o elemento escolhido em $E \cap (A_i \times \{i\})$. Logo f está bem definida e $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$, como queríamos.

F1 $\Rightarrow$ AE

Seja $C = \{A_i\}_{i\in I}$ uma família não vazia de conjuntos não vazios, disjuntos dois a dois. Logo existe $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ uma função escolha para a família C. Consideremos E= $f(I)$, o conjunto imagem de f. Pela escolha de f, para cada $i \in I$, $f(i)$ é único em A_i. Logo E é um conjunto escolha para C.

ii) Formulação 1 equivalente à Formulação 2

F1 $\Leftrightarrow$ F2

Ao analisarmos a Definição 1.2, vemos que dada uma família C de conjuntos, uma função escolha para C é um elemento do produto cartesino da mesma e vice-versa. Sendo assim, existe uma função escolha para C, se e somente se, o produto cartesiano da família C é não vazio.

iii) Formulação 2 equivalente à Formulação 3

F2 $\Rightarrow$ F3

Seja S conjunto não vazio. Considere $I = P(S)\backslash\{\emptyset\} = \{\alpha \subset S : \alpha \neq \emptyset\}$ e a família $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ dada por $A_\alpha = \alpha$ para todo α em I.

A família $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ satisfaz as hipóteses de **F2**, logo $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$, ou seja, existe função

$$f : I \to \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$

tal que $f(\alpha) \in A_\alpha$ para todo α em I. Como $\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha = S$ e $f(A_\alpha) = f(\alpha) \in A_\alpha$ segue que

$$f : P(S) \backslash \{\emptyset\} \to S$$

é uma função escolha para S.

F3 $\Rightarrow$ F2

Seja $C = \{A_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de conjuntos não vazios. Considere $S = \bigcup_{i \in I} A_i$. S é um conjunto não vazio. Logo, por **F3**, existe $\gamma : P(S) - \{\emptyset\} \to S$ uma função escolha para S, isto é, $\gamma(A) \in A$, para todo $A \in P(S) - \{\emptyset\}$.

Desta forma, a função $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ dada por $f(i) = \gamma(A_i)$ está bem definida e $f(i) \in A_i$, para todo $i \in I$. Logo f pertence ao produto cartesiano de C, concluindo que o produto cartesiano de C é não vazio.

2 O Lema de Zorn:

Na Matemática, um teorema de existência afirma a existência de um objeto que pertence a um certo conjunto e que satisfaz certas propriedades. Muitos teoremas de existência podem ser formulados de modo que o conjunto subjacente seja um conjunto parcialmente ordenado e a propriedade crucial seja a maximalidade ou minimalidade. O Lema de Zorn é considerado o teorema mais importante deste tipo.

O Lema de Zorn garante a existência de um objeto maximal (minimal) que é inatingível por um processo finito, a partir da hipótese que todo subconjunto totalmente ordenado é limitado superiormente (inferiormente).

Definiremos agora alguns conceitos da Teoria dos Conjuntos para que posteriormente possamos enunciar o Lema de Zorn:

Definição 2.1 *A relação R sobre um conjunto A é uma* ***relação de ordem*** *se R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.*

Definição 2.2 *A é um conjunto* ***parcialmente ordenado*** *se a relação $\leq$ é uma relação de ordem sobre A.*

Definição 2.3 *Sejam $(S, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\emptyset \neq A \subset S$. Um elemento $x \in S$ é um* ***limite superior*** *(limite inferior) de A se $a \leq x$, $\forall\, a \in A$ ($x \leq a$, $\forall\, a \in A$)*

Definição 2.4 *A é um conjunto* ***totalmente ordenado*** *se para quaisquer x e y em A, temos $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

Definição 2.5 *Um elemento m do conjunto A é* ***elemento maximal*** *(minimal) de A se nenhum dos elementos de A é estritamente maior (menor) que m, isto é,*

$$\forall x \in A \ ; \ m \leq x \ (m \geq x) \Rightarrow x = m.$$

Lema 2.1 (Lema de Zorn) *Seja S um conjunto não vazio parcialmente ordenado por $\leq$, tal que todo subconjunto totalmente ordenado em S admite um limite superior (limite inferior) então, S admite um elemento maximal (minimal).*

Daremos agora uma ilustraçao do Lema de Zorn:

Afirmação: Todo K-espaço vetorial $V \neq \{0\}$ admite uma base.

Seja $S = \{B \subset V \,;\, B \text{ é linearmente independente sobre } K\}$. Temos que S é parcialmente ordenado por $\subset$ (inclusão). Como $V \neq \{0\}$, existe $v \in V$ tal que $v \neq 0$ e então, $\{v\}$ é linearmente independente sobre K. Portanto, $S \neq \emptyset$.

Sejam $(B_i)_{i\in\Gamma}$ um conjunto totalmente ordenado em S e $B = \bigcup_{i\in\Gamma} B_i$. Temos que B é um limite superior de $(B_i)_{i\in\Gamma}$, pois $B_i \subset B, \forall\, i \in \Gamma$. Pelo lema de Zorn, existe $\overline{B}$ um elemento maximal de S. Assim, $\overline{B}$ é linearmente independente sobre K (pois $\overline{B} \in S$).

Mostremos que $V = [\overline{B}]$. Seja $v \in V$.

- $v \in \overline{B} \Longrightarrow v \in [\overline{B}]$
- $v \notin \overline{B} \Longrightarrow \overline{B} \cup \{v\}$ é linearmente dependente sobre K

  Sendo $\overline{B}$ linearmente independente e $\overline{B} \cup \{v\}$ linearmente dependente, temos que $v \in [\overline{V}]$.

Assim, $V = [\overline{B}]$. E portanto, $\overline{B}$ é uma base de V.

Nosso objetivo nesta secção é demonstrar a equivalência entre o Axioma da Escolha, o Lema de Zorn e o Teorema da Boa Ordem de Zermelo.

Definição 2.6 *Sejam S um conjunto e $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de S e $A_0 \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ subfamília de $\mathcal{A}$ diremos que, $\mathcal{B}$ é uma <u>torre</u> se:*

(i) $A_0 \in \mathcal{B}$

(ii) $B \in \mathcal{B} \Rightarrow A_0 \subset B$

(iii) $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \varphi(B) \in \mathcal{B}$

(iv) $\mathcal{C}$ *for totalmente ordenada* $\Rightarrow \bigcup_{c \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{B}$.

Note que $\{\text{torres}\} \neq \emptyset$ pois $\{A_0\}$ é uma torre.

Definição 2.7 *Seja* $\mathcal{B}_0 = \bigcap_{\mathcal{B}:\text{torre}} \mathcal{B}$

$B \in \mathcal{B}_0$ é dito normal se B é comparável com qualquer elemento de $\mathcal{B}_0$

Lema 2.2 *Considere o conjunto S e seja $\mathcal{A}$ uma família não vazia de subconjuntos de S com a propriedade que, se $\mathcal{B}$ for uma subfamília de $\mathcal{A}$ totalmente ordenada por inclusão, então $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{A}$. Suponhamos ainda que $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ seja tal que $\varphi(A) \supset A$ e que $\varphi(A) - A$ contenha, no máximo, um elemento. Nestas condições $\mathcal{A}$ contém um conjunto A tal que $\varphi(A) = A$*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}_0 = \bigcap_{\mathcal{B}:\text{torre}} \mathcal{B}$. Claramente $\mathcal{B}_0$ é uma torre e $A_0 \in \mathcal{B}_0$.

Seja $B \in \mathcal{B}_0$ um elemento normal, e defina

$$\mathcal{B} = \{C \in \mathcal{B}_0 \,;\, C \subset B \,\text{ou}\, \varphi(B) \subset C\}$$

Mostremos que $\mathcal{B}$ é uma torre.

(i) $A_0 \in \mathcal{B}$, $\forall \mathcal{B}$ torre $\Rightarrow A_0 \in \mathcal{B}_0$

(ii) $B \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow B \in \mathcal{B}, \forall \mathcal{B}$ torre $\Rightarrow A_0 \subset B$

(iii) $C \in \mathcal{B} \overset{\text{def.}}{\Longrightarrow} C \subset B$ ou $\varphi(B) \subset C$.

(iii-1) $\varphi(B) \subset C \overset{C \subset \varphi(C)}{\Longrightarrow} \varphi(B) \subset \varphi(C) \overset{\text{def.}}{\Longrightarrow} \varphi(C) \in \mathcal{B}$.

(iii-2) $C \subset B \overset{B\text{:normal}}{\Longrightarrow} \begin{cases} B \subset \varphi(C) \\ \text{ou} \\ \varphi(C) \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \subset B \subset \varphi(C) \Rightarrow \varphi(C) = B \text{ ou } C = B(*) \\ \text{ou} \\ \varphi(C) \in \mathcal{B} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(C) = B \text{ ou } \varphi(C) = \varphi(B) \Rightarrow \varphi(C) \in \mathcal{B} \\ \text{ou} \\ \varphi(C) \in \mathcal{B} \end{cases}.$$

$(*)$ $\varphi(C) - C$ tem no máximo um elemento

(iv) Seja $\mathcal{C}$ uma subfamília totalmente ordenada de $\mathcal{B}$

$$C \in \mathcal{C} \Rightarrow C \in \mathcal{B} \Rightarrow \begin{cases} C \subset B \Rightarrow \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subset B \\ \text{ou} \\ \varphi(B) \subset C \Rightarrow \varphi(B) \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \Rightarrow \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{B} \end{cases}.$$

Logo, $\mathcal{B}$ é uma torre

- Mostremos que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$

  Como, $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$ (definição de $\mathcal{B}$) e $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ (definição de $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}$ é torre).

  Segue que $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$

- Mostremos que $\mathcal{B}_0$ é totalmente ordenado.

  Seja $\mathcal{B}' = \{\text{elemento normal de } \mathcal{B}_0\}$.

  Usando o fato que $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ é uma torre conclui-se facilmente que $\mathcal{B}'$ é uma torre.

  Temos que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}_0$ (definição de $\mathcal{B}'$) e $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}'$ (definição de $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}'$)

  Logo, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_0$.

  Assim, todo $B \in \mathcal{B}_0$ é normal, ou seja quaisquer doi elementos de $\mathcal{B}_0$ são comparáveis. Portanto, $\mathcal{B}_0$ é totalmente ordenado.

Finalmente provemos a afirmação do lema.
Seja $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B$.
Como $\mathcal{B}_0$ é uma torre e $\mathcal{B}_0$ é totalmente ordenado temos que $A \in \mathcal{B}_0$ e $\varphi(A) \in \mathcal{B}_0$.
Logo pela definição de A, concluímos que $A \supset \varphi(A)$.
Sendo $\varphi(A) \supset A$ por hipótese do lema, obtemos a igualdade

$$A = \varphi(A).$$

Corolário 2.1 *Seja S um conjunto parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado tem supremo. Seja $f : S \to S$ uma função tal que $f(x) \geq x$, para qualquer $x \in S$. Então existe pelo menos um $x \in S$ para o qual $f(x) = x$.*

Demonstração: Suponhamos $x_0 \in S$ e seja $\mathcal{A}$ a família de subconjuntos $A \subset S$ com as seguintes propriedades:

1. $x_0 \in A$,
2. A é totalmente ordenado.

Se $\mathcal{B}$ é uma subfamília de $\mathcal{A}$ totalmente ordenada, segue que:

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \in \mathcal{A} \qquad (*)$$

De fato,

1. $x_0 \in B, \forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow x_0 \in \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$
2. B é totalmente ordenado, $\forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ é totalmente odenado

Logo $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \in \mathcal{A}$.
Define-se $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ como segue:

$$\varphi(A) = \begin{cases} A \cup \{f(x)\} \text{ se } x = sup(A) \text{ e } x \in A \\ A \cup \{supA\} \text{ se } sup(A) \notin A \end{cases}.$$

Logo, $\varphi(A) \supset A$ e $\varphi(A) - A$ tem no máximo um elemento.
De $(*)$ temos que A satisfaz a condição do Lema anterior.
Assim, existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(A_0) = A_0$.
Seja $x_0 = sup(A) \in A_0$, então pela definição de φ, $x_0 \in A_0$
Como, $A \cup \{f(x_0)\} = \varphi(A_0) = A_0$, temos que $f(x_0) \in A_0$ ou seja $f(x_0) \leq x_0$.
Sendo $f(x) \geq x$, $\forall x \in S$ pela hipótese do corolário, concluimos que $f(x_0) = x_0$

Teorema 2.1 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) Axioma da Escolha

(2) Qualquer conjunto parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui supremo, contém um elemento maximal.

(3) Qualquer conjunto pacialmente ordenado contém um subconjunto totalmente ordenado maximal.

(4) <u>Lema de Zorn:</u> Qualquer conjunto parcilamente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado tem limite superior (ou limite inferior), contém um elemento maximal (minimal).

(5) <u>Teorema da Boa Ordem de Zermelo:</u> Qualquer conjunto pode ser bem ordenado.

Demonstração:

(1) ⇒ (2)

Seja S um conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto de S totalmente ordenado admite um supremo $(*)$.

Por (1), existe $\gamma : \mathcal{P}(S)-\{\phi\} \to S$ uma função escolha para S ($\gamma(A) \in A, \forall A \in \mathcal{P}(S)-\{\phi\}$).

Para $x \in S$ defina:

$$A_x = \{y \in S\,;\, y \geq x\}$$

Seja $f : S \to S$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \gamma(A_x), & \text{se } A_x \neq \phi \\ x, & \text{se } A_x = \phi \end{cases}.$$

Como, $f(x) = x$ se $A_x = \phi$ e $f(x) \in A_x$ se $A_x \neq \phi$ temos que $f(x) \geq x$, $\forall x \in S$.

Da hipótese $(*)$, segue do corolário acima que: Existe $x_0 \in S$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Logo $A_{x_0} = \emptyset$, ou seja, $y < x_0, \forall y \in S$.

Donde se conclui que x_0 é um elemento maximal de S.

(2) ⇒ (3)

Seja S um conjunto parcialmente ordenado e considere $\mathcal{A}$ uma família totalmente ordenado de subconjuntos de S.

Como $sup(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, segue, por (2) que $\mathcal{A}$ tem um elemento maximal A_0.

Assim A_0 é um subconjunto de S totalmente ordenado maximal de $\mathcal{A}$.

(3) ⇒ (4)

Seja S um conjunto parcialmente ordenado, tal que todo $A \subset S$, totalmente ordenado possui um limite superior.

Por hipótese (3) existe $A_0 \subset S$,totalmente ordenado maximal de S.

Seja x_0 um limite superior de A_0, isto é, $x \leq x_0$, $\forall x \in A_0$

Temos que x_0 é um elemento maximal de S pois:

$$x \in S \;\text{ e }\; x > x_0 \Rightarrow x \notin A_0$$

Daí $A' = A_0 \cup \{x\}$, tal que $A \subset A' \subset S$, o que é um absurdo pois A_0 é um elemento maximal de S.

(4) ⇒ (5)

Seja S um conjunto, e denotemos por $\overline{S}$ uma subfamília de S dada por:

$$\overline{S} = \{A \subset S, \text{com uma boa ordem } \leq_A\}$$

Sejam $A, B \in \overline{S}$ e define-se:

$$A \preceq B \text{ se } \begin{cases} A \subset B \\ \\ x,\, y \in A,\ \ x \leq_A y \Leftrightarrow\ x \leq_B y\ . \\ \\ \forall x \in A,\ \exists\ b \in B\ x \leq b \end{cases}$$

Temos que $\overline{S}$ é parcialmente ordenado pela relação $\preceq$.

Seja $\mathcal{A}$ uma família totalmente ordenada de $\overline{S}$ e tome

$$A^* = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Vamos bem ordenar A^*.

Seja $x, y \in A^*$, então $x \in A$ e $y \in B$ para algum $A, B \in \mathcal{A}$.

Sendo $\mathcal{A}$ totalmente ordenado por inclusão temos, $A \subset B$ ou $B \subset A$. Assim existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $x, y \in C$.

Define-se $x \preceq_* y$ se $x \leq_C y$, $\forall\ C \in \mathcal{A}$ tal que $x, y \in C$.

Temos que:

- $\preceq_*$ é uma relação de ordem
- A^* é bem ordenado por $\preceq_*$, pois $A^* = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, e A é bem ordenado para todo $A \in \mathcal{A}$
- $A \preceq A^*$, para todo $A \in \mathcal{A}$

Logo todo $A \in \overline{S}$ totalmente ordenados tem um limite superior. Por (4), $\overline{S}$ contém um elemento maximal A.

Mostremos que $A = S$

Suponha o contrário.

Seja $x_0 \in S - A$, então tomando $\overline{A} = A \cup \{x_0\}$ temos que $\overline{A}$ é bem ordenado por $\preceq_{\overline{A}}$

$$x \leq_{\overline{A}} y \Leftrightarrow x \leq y \text{ se } x, y \in A$$

$$x \leq_{\overline{A}} x_0 \text{ se } x \in A$$

Logo $A \preceq \overline{A}$ e isto contradiz o fato de A ser um subconjunto maximal de S.

Logo $A = S$, ou seja, S pode ser bem ordenado.

(5) $\Rightarrow$ (1)

Seja S um conjunto, então por (5), podemos supor que S é bem ordenado.

Define-se $\gamma : \mathcal{P}(S) - \{\emptyset\} \to S$ por $\gamma(A) =$ menor elemento de A.

Temos que γ é uma função escolha para S pois $\gamma(A) \in A$, $\forall A \in \mathcal{P}(S) - \{\emptyset\}$.

3 Equipotência de Conjuntos - Conjuntos Finitos e Infinitos - Conjuntos Enumeráveis.

3.1 Equipotência de Conjuntos

Definição 3.1 *Dois conjuntos A e B são equipotentes se existe uma função bijetora entre eles.*
Notação: $A \sim B$ para indicar que A e B são equipotentes.

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists f : A \to B \text{ bijetora.}$$

Proposição 3.1 *Dados os conjuntos A, B e C,*

1. $A \sim A$;
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;
3. $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Observação: Para provar que dois conjuntos são equipotentes, basta mostrar que existe uma função bijetora entre eles e para demonstrar que dois conjuntos não são equipotentes, deve-se mostrar que nenhuma aplicação entre eles pode ser bijetora.

Exemplo 3.1 $\mathbb{N}$ *e* $\mathbb{N} - \{0\}$ *são equipotentes.*
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ *tal que* $f(x) = x + 1$ *é bijetora*

Exemplo 3.2 $\mathbb{R}$ *e* $]-1, 1[$ *são equipotentes.*
$f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ *é bijetora.*

Exemplo 3.3 $[0, 1]$ *e* $[a, b]$ *são equipotentes.*
$f : [0, 1] \to [a, b]$; $f(x) = a(1 - x) + bx$.
$(0, 1)$ *e* (a, b) *também são equipotentes pela mesma função.*

Exemplo 3.4 $\mathbb{N}$ *e* $\mathbb{Z}$ *são equipotentes.*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z};\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \\ -\dfrac{(x+1)}{2}, & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases} \quad \text{é bijetora}$$

Exemplo 3.5 $[0, 1]$ *e* $(0, 1)$ *são equipotentes*
Temos que

$$[0, 1] = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\} \cup A$$

$$(0, 1) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\} \cup A$$

onde $A = [0, 1] - \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$

$$\text{Considere a função } f : [0, 1] \to (0, 1) \text{ tal que } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{n+2}, & \text{se } x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{se } x \in A \end{cases} \quad \text{é bijetora}$$

Os números naturais são definidos por:

$$0 = \{\emptyset\},\ 1 = \{0\},\ 2 = \{0, 1\}, ...$$

Proposição 3.2 *(Princípio de Dirichlet)*
$m, n \in N \Leftrightarrow m = n.$

Demonstração: É claro que se $m = n$, então m e n são equipotentes. Devemos demonstrar a recíproca.

Seja m fixado. Mostremos, por indução, que se $m \sim n$, então $m = n$.

Com efeito, se $m \sim 0$, então existe bijeção $f : m \to 0$. Como $0 = \phi$, vem $m = \phi = 0$.

Suponhamos $m \sim n + 1 = n'$. Seja $f : m \to n'$ bijetora e $k = f(m - 1)$. Consideremos a bijeção $g : n' \to n'$ dada por $g(k) = n$, $g(n) = k$ e $g(x) = x$ para $x \neq n, k$.

Então $g \circ f : m \to n'$ é tal que $g \circ f$ restrita a $m-1$ é injetora e aplica $m-1$ sobre n. Assim $m - 1 \sim n$ e, pela hipótese de indução $m - 1 = n$.

Assim $m = \{0, 1, ..., m - 1\} = \{0, 1, ..., n\} = n + 1 = n'$ e a prova está completa.

Corolário 3.1 *Se $f : n \to n$ é injetora, então f é bijetora.*

Proposição 3.3 *A e $\mathcal{P}(A)$ não são equipotentes.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista uma bijeção $f : A \to P(a)$. Considere o conjunto $P = \{x \in A\,;\, x \notin f(x)\}$. Como f é bijetora, existe $y \in A$ tal que $f(y) = P$. Relativamente a y tem-se:

$$y \in P \Rightarrow y \notin f(y) = P \Rightarrow y \notin P \text{ (absurdo)}$$

e

$$y \notin P \Rightarrow y \in f(y) = P \Rightarrow y \in P \text{ (absurdo)}$$

Logo não existe f bijetora (sobrejetora) de A em $\mathcal{P}(A)$ e, em consequência, A e $\mathcal{P}(A)$ não são equipotentes.

Proposição 3.4 *$\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ não são equipotentes.*

Demonstração: Mostraremos que $\mathbb{N}$ e o intervalo $]0, 1[$ não são equipotentes. Como $]0, 1[$ e $\mathbb{R}$ são equipotentes, decorre que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ não são equipotentes.

Observamos que todo elemento $x \in]0, 1[$ tem uma única representação decimal infinita: $x = 0, x_1x_2...x_n....$

Sunponha que exista $f : \mathbb{N} \to]0, 1[$ bijetora tal que $f(i) = x_i$. Podemos escrever os elementos de $]0, 1[$ como uma sequência $]0, 1[= \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, com $x_i = 0, x_{1i}x_{2i}x_{3i}....$

Tomando $x = 0, a_1a_2a_3...$ com $a_i = 1$ se $x_{ii} \neq 1$ e $a_i = 2$ se $x_{ii} = 1$

$x \in]0, 1[$ e $x \neq x_i$, para todo i, de modo a concluir que f não é sobrejetora, o que é uma contradição. Em consequência, $]0, 1[$ e $\mathbb{N}$ não são equipotentes.

O processo dado acima é conhecido como método da diagonal de Cantor.

3.2 Conjuntos Finitos e Conjuntos Infinitos

Definição 3.2 *Um conjunto F é dito finito se F é equipotente a $\{0, \ldots, n-1\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, F é infinito.*

Proposição 3.1 *O conjunto dos números naturais é infinito.*

Demonstração:
Supondo que $\mathbb{N}$ seja finito, temos que $\mathbb{N} \sim \{0, \ldots, n-1\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe $f : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, n-1\}$ bijetora. Desta forma, a restrição de f a $\{0, \ldots, n-1\}$, $f_n : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, n-1\}$ é injetora, logo bijetora. Como $\mathbb{N} \neq \{0, \ldots, n-1\}$, f não pode ser injetora (contradição).
Portanto, $\mathbb{N}$ é infinito.

Proposição 3.2 *Um conjunto equipotente a um conjunto finito é finito e um conjunto equipotente a um conjunto infinito é infinito.*

Proposição 3.3 ***(i)****Se $A \subset B$ e B é finito, então A é finito.*
(ii)*Se $A \subset B$ e A é infinito, então B é infinito.*

3.3 Conjuntos Enumeráveis

Definição 3.3 *Um conjunto enumerável se finito ou equipotente ao conjunto $\mathbb{N}$.*

Proposição 3.4 *Se X enumerável e $Y \subset X$ então Y é enumerável.*

Demonstração: Se X enumerável então X finito ou existe $f : \mathbb{N} \to X$ uma bijeção.
Se X finito, Y finito, pois $Y \subset X$.
Se existe $f : \mathbb{N} \to X$ bijetora então $X = \{f(0), f(1), \ldots\}$.
Se Y finito, Y enumerável.
Se Y é infinito, devemos encontrar $g : \mathbb{N} \to Y$, uma bijeção.
Seja $K = \{k \in \mathbb{N}\,;\, f(k) \in Y\}$, então temos que $K \neq \emptyset$, pois $Y \neq \emptyset$ e f sobrejetora. Sendo $K \subset \mathbb{N}$, existe k_0 o menor elemento de K, defina então $g(0) = k_0$.
Se $K_1 = \{k \in \mathbb{N}\,;\, f(k) \in Y \text{ e } k > k_0\}$, $k_1 = minK_1$ e defina $g(1) = f(k_1)$.
$\vdots$
Se $K_n = \{k \in \mathbb{N}\,;\, f(k) \in Y \text{ e } k_n > k_{n-1}\}$, $k_n = minK_n$ e definiremos $g(n) = f(k_n), \ldots$.
Logo, temos $g : \mathbb{N} \to X$, de onde podemos concluir que Y é enumerável.

Proposição 3.5 *O conjunto dos números reais é infinito não enumerável.*

Proposição 3.6 *Se A é infinito e existe $f : \mathbb{N} \to A$ sobrejetora, então A é enumerável.*

Demonstração: Se $f : \mathbb{N} \to A$ injetora, então não há nada a provar.
Suponha que $f : \mathbb{N} \to A$ não seja injetora. Assim, para cada $y \in A$ que possua mais de uma pré imagem em $\mathbb{N}$, pelo Axioma da Escolha, podemos escolher um único elemento $x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = y$.
Procedendo dessa forma, podemos construir um subconjunto $B \subset \mathbb{N}$ tal que $f : B \to A$ é bijetora. Como $\mathbb{N}$ enumerável, B enumerável. Portanto, A enumerável.

Proposição 3.5 *O conjunto dos números racionais positivos é enumerável*

Demonstração:

Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \longrightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & \cdots
\end{array}$$

Uma sobrejeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+^*$ é obtida enumerando os elementos da tabela seguindo as setas no diagrama acima.

Como $\mathbb{Q}_+^*$ é infinito e existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+^*$ sobrejetora então $\mathbb{Q}_+^*$ é enumerável.

Observação 3.1 *O conjunto dos números racionais negativos é enumerável*

A demonstração análoga a da proposição anterior.

Proposição 3.6 *A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração: Seja X_k, enumerável, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_K$. Como cada X_k é enumerável, então existem $f_1 : \mathbb{N} \to X_1 \ldots, f_n : \mathbb{N} \to X_n, \ldots,$ bijetoras.

Seja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ tal que $f(m, n) = f_n(m)$. Tem-se que f sobrejetora.

Como existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uma bijeção, então a composição $f \circ g : \mathbb{N} \to X$ sobrejetora e isto garante a enumerabilidade de X.

Corolário 3.1 *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais enumerável.*

Exemplo 3.6 *O conjunto de todos os números algébricos é enumerável.*

Demonstração: Considere a família de conjuntos $\{P_n\}$, onde P_n é o conjunto de todos os polinômios com coeficientes inteiros e com grau igual a n.

Seja $\{A_n\}$ uma família de conjuntos, onde $A_n = \{$ raízes complexas de $p(x)$; $p(x) \in P_n\}$.

Agora, fixado um $j \in \mathbb{N}$, sabemos que P_j tem um número finito de elementos. Como um polinômio de grau n tem n raízes complexas, no máximo, A_j tem também um número finito de elementos.

Seja $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Observe que todos os elementos de A são números algébricos. Como a união de conjuntos enumeráveis é também enumerável, temos que A é enumerável. Queremos mostrar que A é o conjunto de todos os números algébricos, que será denotado por (N_{alg}) .

Como todos os elementos de A são algébricos, temos que $A \subset N_{alg}$. Resta mostrar que $N_{alg} \subset A$.

Seja $\alpha \in N_{alg}$ então α é raiz de um polinômio $g(x)$ com coeficientes inteiros. A cada polinômio $g(x)$ está associado um único grau k, logo $g(x) \in P_k, k \in \mathbb{N}$. Assim, $\alpha \in A_k$ e conseqüentemente, $\alpha \in A$.

Portanto, $A = N_{alg}$ e como A é enumerável, temos que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

Proposição 3.7 *Se X e Y são enumeráveis então $X \times Y$ enumerável.*

Demonstração: Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
(x_1,y_1) & \longrightarrow & (x_1,y_2) & & (x_1,x_3) & \rightarrow & (x_1,y_4) & & (x_1,y_5) & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
(x_2,y_1) & & (x_2,y_2) & & (x_2,y_3) & & (x_2,y_4) & & (x_2,y_5) & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(x_3,y_1) & & (x_3,y_2) & & (x_3,y_3) & & (x_3,y_4) & & (x_3,y_5) & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Enumerando os pares $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_3, y_1), (x_2, y_2), \ldots,$ e seguindo as setas, concluímos que $X \times Y$ enumerável.

Corolário 3.2 *O produto cartesiano finito de conjuntos enumeráveis um conjunto enumerável.*

Demonstração:

Se $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ são enumeráveis então $X_1 \times X_2$ enumerável pela proposição acima.

Como $(X_1 \times X_2) \times X_3 \simeq X_1 \times X_2 \times X_3$ enumerável. Segue da proposição anterior que $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ enumerável.

Proposição 3.8 *A enumerável se, e somente se existe uma função injetora $f : A \to \mathbb{N}$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Claro, pela definição de enumerabilidade.

($\Leftarrow$) Se existe uma função injetora $f : A \to \mathbb{N}$ então, A equipotente a um subconjunto B de $\mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ enumerável, temos que B enumerável. Como a composição entre as bijeções de A em B e de B em $\mathbb{N}$, nos dá uma bijeção entre A e $\mathbb{N}$. Portanto A enumerável.

Proposição 3.9 *Todo subconjunto infinito contém um subconjunto enumerável.*

Observação 3.1 *Uma consequência desta proposição a definição de Dedekind para o infinito: "Um conjunto infinito se, e somente se equipotente a um de seus subconjuntos próprios".*

3.4 O Teorema de Schroder - Bernstein

Teorema 3.1 *Sejam X e Y dois conjuntos tais que X equipotente a um subconjunto de Y e Y equipotente a um subconjunto de X. Então, X e Y são equipotentes.*

Um enunciado análogo é o seguinte:

Teorema 3.2 *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ são funções injetoras, então existe uma função bijetora $h : X \to Y$.*

Demonstração:
Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ injetoras. Suponhamos que f e g não são sobrejetoras, caso contrário não há o que demonstrar.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & \to & Y & \to & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & X \\ & & & & & & \ldots\ldots f^{-1}(g^{-1}(x)) & \leftarrow & g^{-1}(x) & \leftarrow & x & & \end{array}$$

$$x \in X \Rightarrow \begin{cases} x \in Im(g) \Rightarrow g^{-1}(\{x\}) \text{ está definida.} \\ x \notin Im(g) \Rightarrow x \text{ é dito 0-ancestral.} \end{cases}$$

$$g^{-1}(\{x\}) \in Y \Rightarrow \begin{cases} g^{-1}(\{x\}) \in Im(f) \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(\{x\})) \text{ está definida.} \\ x \notin Im(f) \Rightarrow x \text{ é dito 1-ancestral.} \end{cases}$$

$$f^{-1}(g^{-1}(\{x\})) \in X \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(g^{-1}(\{x\})) \in Im(g) \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(\{x\}))) \text{ está definida.} \\ x \notin Im(g) \Rightarrow x \text{ é dito 2-ancestral.} \end{cases}$$

Para cada $x \in X$ temos três possibilidades: x tem infinitos anscestrais, o número de anscestrais de x é par ou o número de anscestrais de x é ímpar.

Denotamos por X_j, X_p, X_i os subconjuntos de X formados pelos elementos que têm infinitos anscestrais, que têm número par de anscestrais e que têm número ímpar de anscestrais, respectivamente.

Tem-se que $X = X_j \cup X_p \cup X_i$.

A função $F : X \to Y$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X_j \cup X_i \text{ ou } x \text{ é um 0-anscestral} \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X_p, p \geq 2. \end{cases}$$

é bijetora.

Portanto, X é equipotente a Y.

4 Números Cardinais

4.1 Noção de número cardinal

Intuitivamente, número cardinal de um conjunto é o que há de comum entre todos os conjuntos que são equipotentes ao dado conjunto.

A notação $\overline{\overline{A}}$ para número cardinal é devida à Cantor que usava duas barras sobre A para indicar dois níveis de abstração: o primeiro que se abstrai da natureza particular dos elementos do conjunto, e o segundo é com relação à ordem.

Na teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel, a noção de número cardinal é um conceito primitivo da Teoria e para caracterizá-la é necessário um novo axioma

Axioma de Números Cardinais
A cada conjunto A está associado um objeto $\overline{\overline{A}}$, o número cardinal de A, tal que

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \text{ se, e somente se, } A \text{ é equipotente a } B$$

Definimos os cardinais finitos (números cardinais de conjuntos finitos) assim:
$0 = \overline{\overline{\phi}}, \qquad 1 = \overline{\overline{\{0\}}}, \qquad 2 = \overline{\overline{\{0,1\}}} \qquad \ldots \qquad n = \overline{\overline{\{0,1,2,\ldots,n-1\}}}$

Denotamos por

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}}, \qquad \aleph_1 = \overline{\overline{P(\mathbb{N})}}, \qquad \aleph_2 = \overline{\overline{P(P(\mathbb{N}))}} \qquad \ldots \qquad c = \overline{\overline{\mathbb{R}}}.$$

Outras notações usadas para número cardinal de A: $|A|$, $c(A)$, $card(A)$, $\#A$.

Definição 4.1 *Dados dois números cardinais u e v escrevemos $u \leq v$ se existem conjuntos A e B que representam u e v, respectivamente, tais que existe uma aplicação injetora de A em B.*
Representamos por $u < v$ o fato de $u \leq v$ e $u \neq v$.

Proposição 4.1 *A definição anterior não depende dos representantes A e B escolhidos para u e v, respectivamente.*

Demonstração: De fato, se $u = \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}}$ e $v = \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}}$, então $A \overset{F}{\sim} A'$ e $B \overset{G}{\sim} B'$, com F e G aplicações bijetoras.
Se existe uma aplicação injetora f de A em B, a aplicação $G_\circ f_\circ F^{-1}$ de A' em B' é injetora.

Proposição 4.2 *A relação definida acima é uma relação de ordem parcial, para qualquer conjunto de números cardinais.*

Demonstração:

- Seja $u = \overline{\overline{A}}$. Existe uma aplicação bijetora $id : A \longrightarrow A$ tal que $id(x) = x$.
  Logo, $u \leq u$ e portanto, a relação " $\leq$ " é reflexiva.

- Sejam $u = \overline{\overline{A}}$, $v = \overline{\overline{B}}$ e $w = \overline{\overline{C}}$.

  Se $u \leq v$ e $v \leq w$, ou seja, se existem aplicações injetoras $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ então, a aplicação $gf : A \longrightarrow C$ é injetora.

  Logo $u \leq w$ e portanto, a relação " $\leq$ " é transitiva.

- A propriedade anti-simétrica é consequência do teorema de Schroeder-Bernstein.

  De fato, sejam $u = \overline{\overline{A}}$ e $v = \overline{\overline{B}}$.

  Se $u \leq v$ e $v \leq u$, ou seja, se existem aplicações injetoras $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ então, pelo teorema de Schroeder-Bernstein, existe uma aplicação bijetora $h : A \longrightarrow B$.

  Logo, por definição, $u = v$ e portanto, a relação " $\leq$ " é anti-simétrica.

Teorema 4.1 (Cantor) *Para qualquer conjunto A, tem-se $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}}$.*

Demonstração: Considere a aplicação $f : A \longrightarrow P(A)$ dada por $f(x) = \{x\}$. Temos que f é injetora, de modo que $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{P(A)}}$.

Já foi provado que A e $P(A)$ não são equipotentes, o que implica $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{P(A)}}$. Assim, temos $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}}$.

Observação 4.1 *O teorema de Cantor implica que dado qualquer número cardinal, sempre existe um número cardinal maior que o número cardinal dado.*

Observação 4.2 *Do teorema de Cantor, segue, ainda, que*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots < \aleph_n < \ldots$$

Proposição 4.3 *Não existe o conjunto de todos os números cardinais.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que existe o conjunto A de todos os números cardinais.

Dado $\alpha \in A$, existe um conjunto A_α tal que $\overline{\overline{A_\alpha}} = \alpha$.

Seja $B = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$ e $P(B)$ o conjunto das partes de B.

Temos que $P(B) \sim A_{\overline{\overline{P(B)}}} \subset B$, de modo que $\overline{\overline{P(B)}} \leq \overline{\overline{B}}$, contrariando o teorema de Cantor.

Proposição 4.4 $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = c = \aleph_1$

Demonstração: Temos que $\aleph_1 = \overline{\overline{P(\mathbb{N})}} = \overline{\overline{P(\mathbb{Q})}}$, pois $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.

Definimos $f : \mathbb{R} \longrightarrow P(\mathbb{Q})$ tal que $f(a) = \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x < a\}$.

Temos que f é injetora, pois dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq b$. Supondo, sem perda de generalidade, que $a < b$, então existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$.

Assim, $c \notin f(a)$ e $c \in f(b)$, donde segue que $f(a) \neq f(b)$.

Mostramos, com isso, que $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = c \leq \aleph_1$.

Agora, $P(A) \sim C(A) = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}\,;\, f \text{ é função}\}$.

De fato, se $B \subset A$, defina $f_B : A \longrightarrow \{0,1\}$ por $f_B(x) = 0$ se $x \notin B$ e $f_B(x) = 1$ se $x \in B$ (f_B é a função característica de B).

A função que a cada $B \subset A$ associa a função característica f_B é uma função bijetora de $P(A)$ em $C(A)$.

Segue que $P(\mathbb{Q}) \sim P(\mathbb{N}) \sim C(\mathbb{N})$.

Definamos $F : C(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$ tal que $F(f) = 0, f(1)f(2)f(3)\ldots$ (uma representação decimal infinita constituida de zeros e uns).

Se $f, g \in C(\mathbb{N})$, com $f \neq g$, então existe n tal que $f(n) \neq g(n)$. Logo $F(f) \neq F(g)$, donde segue que F é injetora.

Assim, $\aleph_1 = \overline{\overline{P(\mathbb{N})}} = \overline{\overline{C(\mathbb{N})}} \leq \overline{\overline{[0,1]}} = c = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

Como a relação " $\leq$ " é anti-simétrica temos que $\aleph_1 = c = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

4.2 A Hipótese do Continuun

A hipótese do Continuun diz que não existe número cardinal x tal que

$$\aleph_0 < x < \aleph_1$$

Cantor se ocupou com esta questão e pelo que consta, foi o último problema da Teoria dos Conjuntos ao qual ele se dedicou.

Em 1963 um matemático americano P. Cohen demonstrou que tal hipótese é independente dos axiomas da Teoria dos Conjuntos: não pode ser demonstrada e nem refutada.

Ele mostrou, além disso, que se houver uma contradição na Teoria dos Conjuntos acrescida dessa hipótese, esta contradição existe na teoria sem admissão da hipótese.

A hipótese de que entre dois alef's consecutivos não existe número cardinal, é conhecida como a hipótese generalizada do continuum.

4.3 A Aritmética dos Números Cardinais

4.3.1 Adição

Sejam u e v dois númeos cardinais e sejam A e B dois conjuntos que representam, respectivamente, os números cardinais u e v. Podemos supor que $A \cap B = \phi$, pois caso contrário, tomando $A' = A$ e $B' = B \setminus (A \cap B)$ temos que $A \cup B = A' \cup B'$, com $A' \cap B' = \phi$.

Definição 4.2 *Definimos a adição de números cardinais da seguinte forma:*

$$u + v = \overline{\overline{A \cup B}}.$$

Proposição 4.5

1) u e v não dependem da escolha dos representantes disjuntos A e B.

2) $u + v = v + u$ (vale a propriedade comutativa).

3) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (vale a propriedade associativa).

4) $u_1 \leq v_1$ e $u_2 \leq v_2 \Rightarrow u_1 + u_2 \leq v_1 + v_2$ (compatibilidade com a ordem).

Demonstração:

1) Se $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}}$, $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}}$ são tais que $A \cup B = \phi$ e $A' \cup B' = \phi$, entaão $A \cup B \sim A' \cup B'$, donde $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A' \cup B'}}$ e portanto, a adição está bem definida.

2) $u + v = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{B \cup A}} = \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{A}} = v + u$.

3) $u + (v + w) = \overline{\overline{A}} + (\overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}}) = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{(B \cup C)}} = \overline{\overline{A \cup (B \cup C)}} = \overline{\overline{(A \cup B) \cup C}} = \overline{\overline{A \cup B}} + \overline{\overline{C}} = (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}) + \overline{\overline{C}} = (u + v) + w$.

4) Sejam $u_1 = \overline{\overline{A_1}}$, $u_2 = \overline{\overline{A_2}}$, $v_1 = \overline{\overline{B_1}}$, $v_2 = \overline{\overline{B_2}}$, $f_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ e $f_2 : A_2 \longrightarrow B_2$ injetoras.

Suponha $A_1 \cap A_2 = \phi = B_1 \cap B_2$.

Daí, $F : A_1 \cup A_2 \longrightarrow B_1 \cup B_2$ dada por $F(x) = f_i(x)$ se $x \in A_1$, $i = 1, 2$ é bem definida e injetora.

Logo, $\overline{\overline{A_1 \cup A_2}} \leq \overline{\overline{B_1 \cup B_2}}$ e portanto, $u_1 + v_1 \leq u_2 + v_2$.

4.3.2 Multiplicação

Definição 4.3 *Definimos a multiplicação de números cardinais da seguinte forma:*

$$\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$$

Observação 4.3 *Aqui não há necessidade de A e B serem disjuntos.*

Proposição 4.6

1) A multiplicação de números cardinais está bem definida.

2) $\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B}}.\overline{\overline{A}}$ (vale a propriedade comutativa).

3) $(\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}}).\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}}.(\overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}})$ (vale a propriedade associativa).

4) $(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}).\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}}.\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}}$ (vale a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição).

Demonstração:

1) $A \sim A'$ e $B \sim B' \Longrightarrow A \times B \sim A' \times B' \Longrightarrow \overline{\overline{A \times B}} = \overline{\overline{A' \times B'}}$.

2) $= \overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}} = \overline{\overline{B \times A}} = \overline{\overline{B}}.\overline{\overline{A}} = .$

3) $(\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}}).\overline{\overline{C}} = (\overline{\overline{A \times B}}).\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{(A \times B) \times C}} = \overline{\overline{A \times (B \times C)}} = \overline{\overline{A}}.\overline{\overline{(B \times C)}} = \overline{\overline{A}}.(\overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}})$

4) $(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}).\overline{\overline{C}} = (\overline{\overline{A \cup B}}).\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{(A \cup B) \times C}} = \overline{\overline{(A \times C) \cup (B \times C)}} = \overline{\overline{A \times C}} + \overline{\overline{B \times C}} = \overline{\overline{A}}.\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}}$.

4.3.3 Potenciação

Definição 4.4 *Definimos a potenciação de números cardinais da seguinte forma:*

$$u = \overline{\overline{A}} \text{ e } v = \overline{\overline{B}},\ u^v = \overline{\overline{A^B}},$$

onde $A^B = \{f : B \longrightarrow A\,;\, f \text{ é função}\}$.

Proposição 4.7 *Valem as seguintes propriedades:*

1) *Se* $u = \overline{\overline{A}}$ *então,* $\overline{\overline{P(A)}} = 2^u$.

2) $u^{v+w} = u^v.u^w$

3) $(u.v)^w = u^w.v^w$

4) $(u^v)^w = u^{v.w}$

Demonstração: Primeiramente, mostremos que a potenciação está bem definida.

Sejam $A \overset{f}{\sim} A'$ e $B \overset{g}{\sim} B'$, onde f e g são aplicações bijetoras de A em A' e de B em B', respectivamente.

A função $F : A^B \longrightarrow A'^{B'}$ dada por $F(\alpha) = f\alpha g^{-1}$ é bijetora, donde segue que $A^B \sim A'^{B'}$ e, em consequência, a potenciação está bem definida, pois não depende da escolha dos representantes para os números cardinais envolvidos.

1) Temos que $P(A) \sim C(A) = \{f : A \longrightarrow \{0,1\}\,;\, f \text{ é função}\}$.

De fato, se $B \subset A$, defina $f_B : A \longrightarrow \{0,1\}$ por $f_B(x) = 0$ se $x \notin B$ e $f_B(x) = 1$ se $x \in B$ (f_B é a função característica de B).

A função que a cada $B \subset A$ associa a função característica f_B é uma função bijetora de $P(A)$ em $C(A)$. Como $\overline{\overline{C(A)}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$, decorre que $\overline{\overline{P(A)}} = 2^u$ se $\overline{\overline{A}} = u$.

2) $u^{v+w} = \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}}} = \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B \cup C}}} = \overline{\overline{A^{B \cup C}}} \overset{(*)}{=} \overline{\overline{A^B \times A^C}} = \overline{\overline{A^B}}.\overline{\overline{A^C}} = \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}}.\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{C}}} = u^v.u^w$.

A demonstração dos ítens 3) e 4) ficará a cargo do leitor.

Bibliografia

[1] Izar, S., Tadini, W.M. : *Teoria Axiomática dos Conjuntos*, UNESP.

[2] Lipschutz, L. : *Topologia Geral*, Coleção Schaum.

[3] Brietzke, E.H.M., Silva, P.R., Kakuta, N.K. : *Análise na Reta*, Notas de aula, 1999.

[4] Halmos, P. : *Teoria Ingênua dos Conjuntos*.